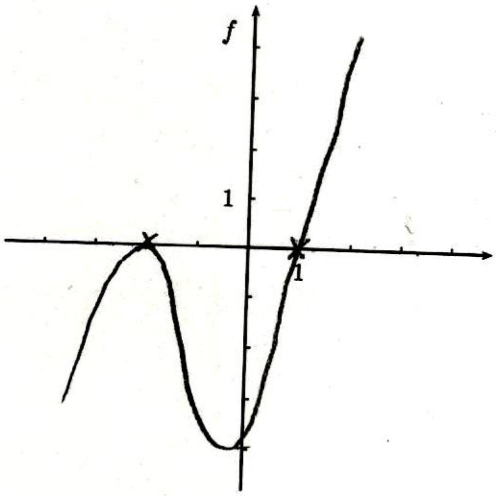
Aufgabe 1 (8 Punkte)

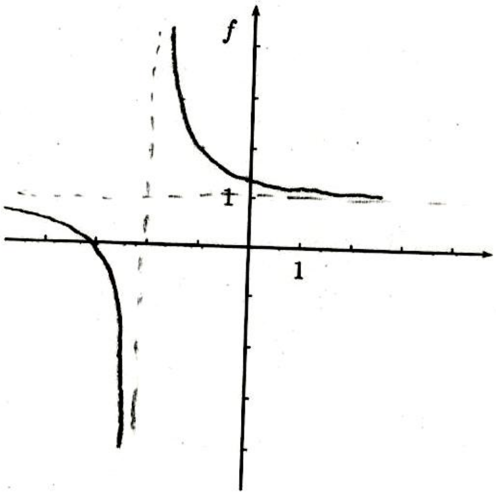
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



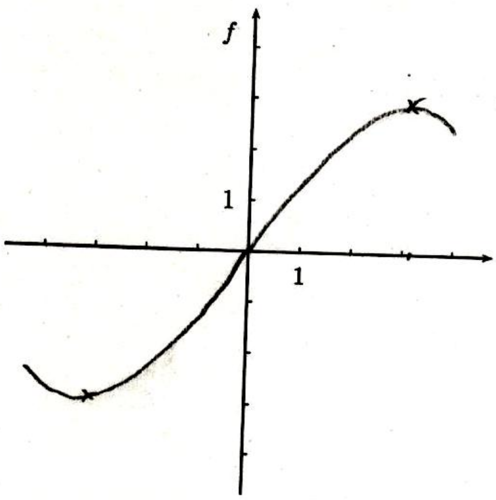
$f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$

b)



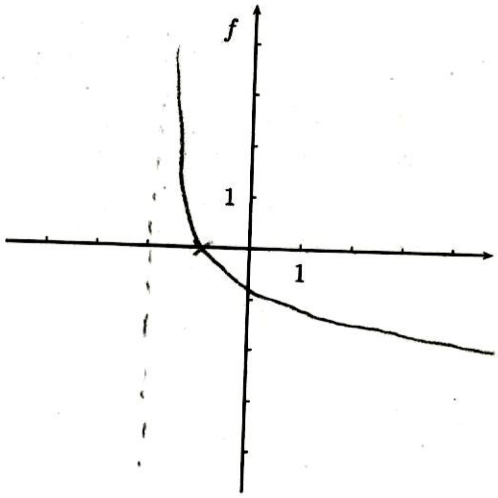
$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

c)



$f(x) = 3\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

d)



$f(x) = -\ln(x+2)$

Aufgabe 2 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche Symmetrien ergeben sich bei den angegebenen Funktionen g?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine **ungerade** Funktion,	gerade	ungerade	im Allgemeinen keines von beiden	Enthaltung
so ist $g(x) = x^2 \cdot f(x)$		X		
so ist $g(x) = f(x^2)$	X			
so ist $g(x) = \left(f(x)\right)^2$	X			

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine **gerade** Funktion,	gerade	ungerade	im Allgemeinen keines von beiden	Enthaltung
so ist $g(x) = e^x \cdot f(x)$			X	
so ist $g(x) = f(e^x)$			X	
so ist $g(x) = e^{f(x)}$	X			

Aufgabe 3 (4 + 2 = 6 Punkte)

Betrachtet wird die (unecht) gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{6x^4 - 4x^3 + 2x + 4}{-2x^3 + x + 1}. \quad = -3x + 2 + \frac{3x^2 + 3x + 2}{-2x^3 + x + 1}$$

a) Stellen Sie die Funktion f als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochen rationalen Funktion dar.

Tipp: Polynomdivision!

b) Geben Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) an:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$(6x^4 - 4x^3 + 2x + 4) : (-2x^3 + x + 1) = -3x + 2$$

$$-(6x^4 \quad -3x^2 - 3x)$$

$$-4x^3 + 3x^2 + 5x + 4$$

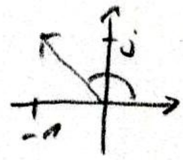
$$-(-4x^3 \quad +2x + 2)$$

$$3x^2 + 3x + 2$$

Aufgabe 4 (1 + 1 + 4 + 3 = 9 Punkte)

a) Wie lautet die Polardarstellung von $z = -1 + \mathrm{j}$?

$z = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{4}\pi j}$



b) Wie lautet die kartesische Darstellung von $z = 3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{j}}$?

$z = -3j$

c) Berechnen Sie zu $z_1 = 2 + \mathrm{j}$ und $z_2 = 3 - 2\mathrm{j}$

$z_1 \cdot z_2 = (2+j) \cdot (3-2j) = 6 - 4j + 3j + 2 = 8 - j$

und

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+j)(3+2j)}{(3-2j)(3+2j)} = \frac{6 + 4j + 3j - 2}{9+4} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}j$$

d) Sei $z = 4 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$.

Geben Sie (jeweils in Polar-Koordinaten) z^2 und ein $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$ an.

$z^2 = 16 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi j}$

$w = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{6} j}$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$

und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x < 0, \\ 3, & \text{falls } x = 0, \\ 4, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

Geben Sie, falls in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existent, den Wert der folgenden Grenzwerte an, bzw. notieren Sie „exisitert nicht“.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x)) =$ $\frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(g(x)) =$ $\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(f(x)) =$ 4

d) $g(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)) =$ 3

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) =$ 2

f) $\lim\limits_{x \to 0+} f(g(x)) =$ $\frac{1}{4}$

g) $f(\lim\limits_{x \to 0+} g(x)) =$ $\frac{1}{4}$

h) $\lim\limits_{x \to 0+} g(f(x)) =$ 4

Aufgabe 6

a) $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$f''(x) = 2x - 2$

x_0 lokale Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

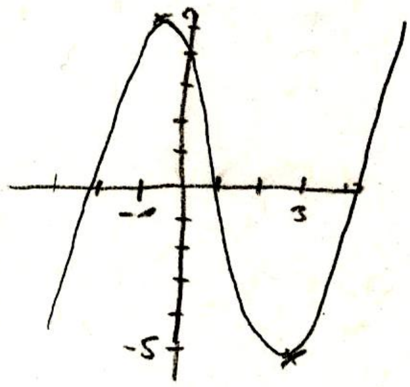
$\Rightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$ oder $x_0 = -1$

Es ist $f''(3) = 4 > 0 \Rightarrow 3$ ist lok. Minimalstelle

$f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow -1$ ist lok. Maximalstelle

$f(3) = 9 - 9 - 9 + 4 = -5$; $f(-1) = \frac{1}{3} - 1 + 3 + 4 = \frac{17}{3}$

b) 3 Nullstellen



$f(-3) = -9 - 9 + 9 + 4 = -5 < 0$

und $f(-1) = \frac{17}{3} > 0$

$\Rightarrow$ in $[-3; -1]$ liegt eine Nullstelle

$\rightarrow$ Startwerte -3 und -1

$f(-1) = \frac{17}{3} > 0$, $f(3) = -5 < 0$

$\Rightarrow$ in $[-1; 3]$ liegt eine Nullstelle $\rightarrow$ Startwerte -1 und 3

$f(3) = -5 < 0$ und $f(5) = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{125}_{>120} - 25 - 15 + 4 > 40 - 40 + 4 > 0$

$\Rightarrow$ in $[3; 5]$ liegt eine Nullstelle $\rightarrow$ Startwerte 3 und 5

c1) $T_{2;1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot f''(1) \cdot (x-1)^2$

$= \frac{1}{3} + (-4)(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x-1)^2$

$= -4x + 4 + \frac{1}{3} = -4x + \frac{13}{3}$

$T_{4;1}(x) \underset{\uparrow}{=} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

da Grad$(f) = 3 \leq 4$.

Aufgabe 7

a) $$\frac{\cos(2x)-1}{e^{x^2}-1} = \frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-+\ldots-1}{1+x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2+\ldots-1}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\cdot 4x^2+x^4\cdot(\ldots)}{x^2+x^4\cdot(\ldots)}$$

$$= \frac{-2+x^4\cdot(\ldots)}{1+x^4\cdot(\ldots)}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} -2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{e^{x^2}-1} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)\cdot 2}{e^{x^2}\cdot 2x}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(2x)\cdot 2}{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x+e^{x^2}}$$

$$= \frac{-\cos(0)\cdot 2}{0+e^0}$$

$$= \frac{-1\cdot 2}{0+1} = -2$$

Aufgabe 8 (3 + 3 = 6 Punkte)

Das Integral $\int\limits_0^6 f(x)\,dx$ zur abgebildeten Funktion f (mit einer Minimalstelle bei 1.5 und einer Maximalstelle bei 5) soll durch eine Riemannsche Zwischensumme S zur Zerlegung

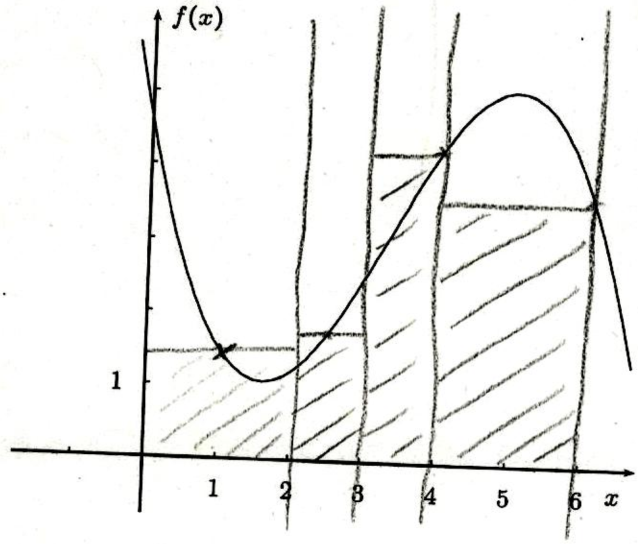
$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 6$$

angenähert werden.

a) Skizzieren Sie in dem Bild, wie sich die Riemannsche Zwischensumme S ergibt, wenn man als Zwischenstellen

$$\widehat{x_1} = 1, \quad \widehat{x_2} = 2.5, \quad \widehat{x_3} = 4, \quad \widehat{x_4} = 6$$

wählt. (Sie brauchen nur zu zeichnen, nicht zu rechnen.)



b) Welche Zwischenstellen $\widehat{x_1}$, $\widehat{x_2}$, $\widehat{x_3}$ und $\widehat{x_4}$ muss man wählen, damit die Riemannsche Zwischensumme S (bei gleicher Zerlegung) der Obersumme entspricht?

$\widehat{x_1}$ = 0 $\quad$ $\widehat{x_2}$ = 3 $\quad$ $\widehat{x_3}$ = 4 $\quad$ $\widehat{x_4}$ = 5

Aufgabe 9

a) $\int \frac{1}{2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln|2x+4|$

alter-
nativ: $\parallel$

$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+2|$

b) $\int x^3\cdot\sqrt{x^4-7}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot(x^4-7)^{3/2}$

$= \frac{1}{6}(x^4-7)^{3/2}$

Aufgabe 10

a) $\lambda = \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

d) $\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \arccos \frac{8+0+0-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}}$

$= \arccos \frac{6}{\underbrace{\sqrt{6 \cdot 6 \cdot 4}}_{= 6 \cdot 2 = 12}}$

$= \arccos \frac{1}{2}$

$= 60°$

Aufgabe 11 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Seien $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{c}$ feste Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ ungleich dem Nullvektor.

Beschreiben die folgenden Mengen einen Punkt, eine Gerade oder eine Ebene?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Ent." für eine Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	Punkt	Gerade	Ebene	Ent.
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ und } \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = 0\}$, wobei $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ in die gleiche Richtung zeigen.			X	
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ und } \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = 0\}$, wobei $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ in verschiedene Richtungen zeigen.		X		
$\{\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in die gleiche Richtung zeigen.		X		
$\{\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, wobei $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in verschiedene Richtungen zeigen.			X	
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} \times \vec{x} = \vec{0}\}$,		X		
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} \cdot \vec{x} = 0\}$,			X	
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{c} + \vec{x} = \vec{0}\}$,	X			
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{x} = 0\}$,	X			

Aufgabe 12

a) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300g \\ 300g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360g \\ 240g \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow A \\ \leftarrow B \end{matrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}84 & 0{,}48 \\ 0{,}16 & 0{,}52 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300g \\ 300g \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & 0{,}3 & 300 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 300 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 10 \\ \cdot 10 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 3000 \\ 1 & 7 & 3000 \end{array}\right) - 9 \cdot \mathrm{II}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 3000 \\ 0 & -60 & -24000 \end{array}\right) : (-60) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 3000 \\ 0 & 1 & 400 \end{array}\right) - 7 \cdot \mathrm{II}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 400 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ 200g von A und 400g von B.

Aufgabe 13

a) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + cx_2^2$

b) b1) $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$

b2) 1. Hauptunterdet: $\det(1) = 1 > 0$ unabh. von c

2. " : $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix} = c - 4 > 0$

$\Leftrightarrow c > 4$

$\Rightarrow$ Für $c > 4$ ist A pos. definit

Alternativ:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + (2x_2)^2 - (2x_2)^2 + cx_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 + (c-4)x_2^2$$

Daran sieht man, dass $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$ positiv ist genau dann, wenn $c > 4$ ist.