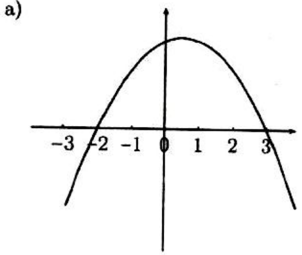
Aufgabe 1 (18 Punkte, davon bis zu 9 Enthaltungspunkte)

Kreuzen Sie jeweils an, welche Funktion den nebenstehenden Funktionsgraf erzeugt.

(Die Skalierungen der y-Achse sind unterschiedlich.)

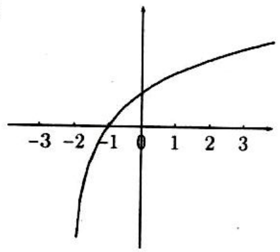
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1,5 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

a)



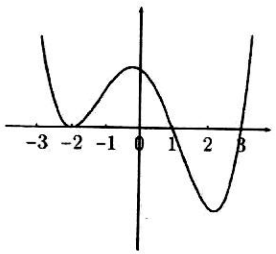
$f(x) = x^2 - x - 6$	
$f(x) = x^2 + x + 6$	
$f(x) = -x^2 - x - 6$	
$f(x) = -x^2 + x + 6$	X
Enthaltung	

b)



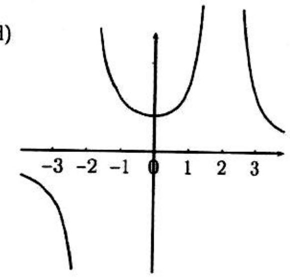
$f(x) = \ln(x-2)$	
$f(x) = \ln(x) - 2$	
$f(x) = \ln(x+2)$	X
$f(x) = \ln(x) + 2$	
Enthaltung	

c)



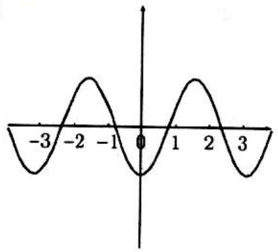
$f(x) = (x+2)^2(x-1)(x-3)$	X
$f(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3)$	
$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)^2$	
$f(x) = (x+2)^2(x-1)(x-3)^2$	
Enthaltung	

d)



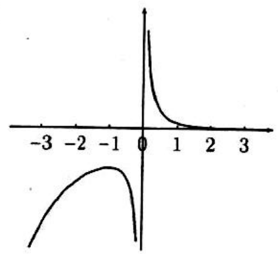
$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$	
$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}$	
$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x-2)^2}$	X
$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$	
Enthaltung	

e)



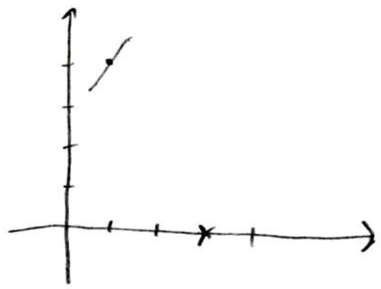
$f(x) = \cos(-2x)$	
$f(x) = -\cos(2x)$	X
$f(x) = \cos(-\frac{1}{2}x)$	
$f(x) = -\cos(\frac{1}{2}x)$	
Enthaltung	

f)



$f(x) = x \cdot e^x$	
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x$	
$f(x) = x \cdot e^{-x}$	
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$	X
Enthaltung	

Aufgabe 2



a) Ansatz: $f(x) = a \cdot (x-3)^2 + b$

$f'(x) = 2a(x-3)$

mit $4 = f(1) = a \cdot (-2)^2 + b = 4a + b$ $\longrightarrow 4 = -2 + b \Rightarrow b = 6$

und $2 = f'(1) = 2a(-2) = -4a$ $\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Also: $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 6$

b) $T(x) = 2 \cdot (x-1) + 4$

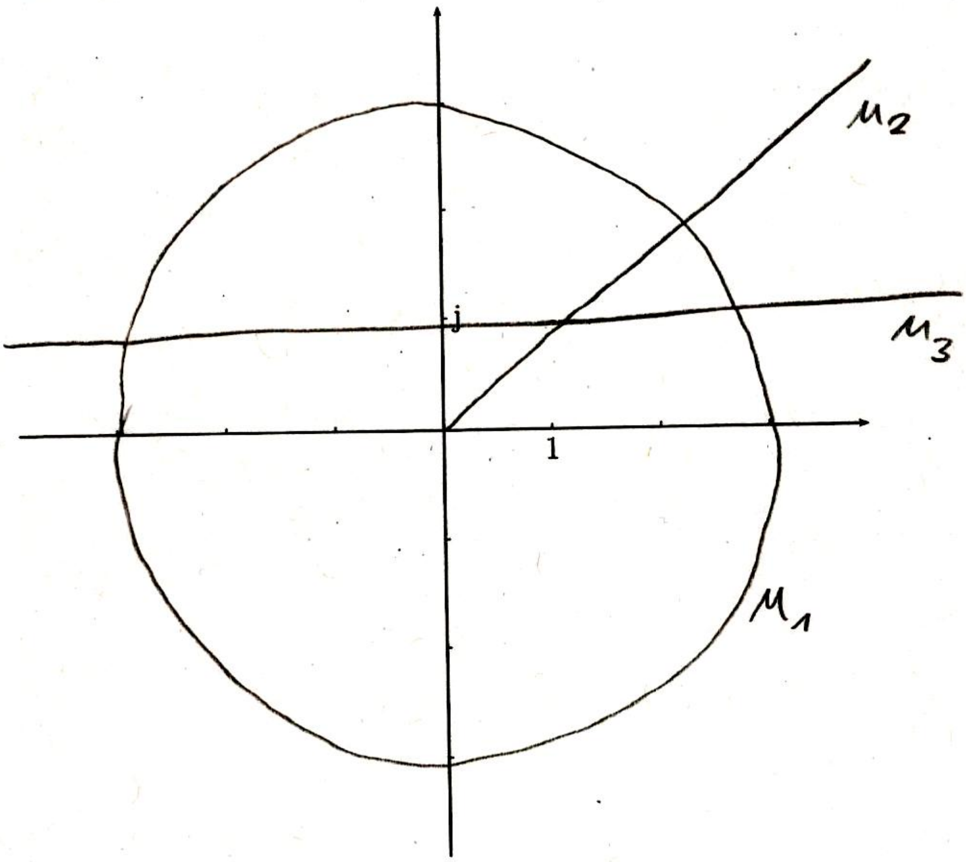
$= 2x + 2$

Aufgabe 3 (6 + 6 = 12 Punkte)

Betrachtet werden die folgenden drei Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}, \\
M_2 &= \{z = r \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}} \mid r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}, \\
M_3 &= \{z = a + j \mid a \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

a) Zeichnen Sie M_1, M_2 und M_3 in das Koordinatensystem ein.



b) Geben Sie die Elemente der Schnittmengen

$$M_1 \cap M_2, \qquad M_1 \cap M_3 \quad \text{und} \quad M_2 \cap M_3$$

an (egal, ob in Polar- oder kartesischer Darstellung).

$M_1 \cap M_2 = \{3 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}\}$

$M_1 \cap M_3 = \{\sqrt{8} + j \,;\, -\sqrt{8} + j\}$

$M_2 \cap M_3 = \{1 + j\}$

Aufgabe 4

a) $R_1 = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

$R_2 = R_1 - \frac{1}{12} R_1 = \left(1 - \frac{1}{12}\right) R_1 = \frac{11}{12} R_1 = \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} = \left(\frac{11}{12}\right)^2$

$R_3 = R_2 - \frac{1}{12} R_2 = \left(1 - \frac{1}{12}\right) R_2 = \frac{11}{12} R_2 = \frac{11}{12} \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right)^3$

...

Eine rekursive Berechnungsvorschrift ist also

$R_1 = \frac{11}{12}, \quad R_n = \frac{11}{12} \cdot R_{n-1}$

eine direkte Formel

$R_n = \left(\frac{11}{12}\right)^n$

b) $\frac{1}{2} = R_n = \left(\frac{11}{12}\right)^n \iff n = \log_{\frac{11}{12}} \frac{1}{2}$

Aufgabe 5 ($4 \times 2 = 8$ Punkte)

Welchen Wert haben die folgenden Reihen?
(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)}\right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)}\right)$

$= \lim_{N \to \infty} \left[\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{3 \cdot 2}}\right) + \cancel{\left(\frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3 \cdot N}\right.} - \left.\frac{1}{3(N+1)}\right)\right]$

„Teleskop-summe"

$= \lim_{N \to \infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3(N+1)}\right]$

$= \frac{1}{3}$

Aufgabe 6

Es ist $f'(x) = 3x^2 + 6x + c$ und $f''(x) = 6x + 6$

a) Es muss gelten:

$$0 = f'(1) = 3 + 6 + c \Leftrightarrow c = -9$$

Es ist $f''(1) = 12 > 0$, d.h. 1 ist Minimalstelle

b) Für Extremstellen gilt

$$0 = f'(x) = 3x^2 + 6x + c$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 2x + c/3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{1 - c/3}$$

Es gibt also genau dann keine Extremstellen, wenn

gilt $1 - c/3 < 0 \Leftrightarrow 3 < c$.

Aufgabe 7

$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow f(2) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = +2 \cdot \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow f'''(2) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow T_{3,2}(x) = \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot (x-2) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot (x-2)^3$

$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3$

Aufgabe 8

$$\int e^x \cos(3x)\,dx = e^x \cdot \cos(3x) - \int e^x \cdot 3 \cdot (-\sin(3x))\,dx$$

$$= e^x \cdot \cos(3x) + 3 \cdot \int e^x \cdot \sin(3x)\,dx$$

$$= e^x \cdot \cos(3x)$$
$$+ 3 \cdot \left[e^x \sin(3x) - \int e^x \, 3 \cdot \cos(3x)\,dx \right]$$

$$= e^x \cos(3x) + 3 \cdot e^x \sin(3x)$$
$$- 9 \cdot \int e^x \cos(3x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 10 \cdot \int e^x \cos(3x)\,dx = e^x \cos(3x) + 3 \cdot e^x \sin(3x)$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos(3x)\,dx = \frac{1}{10} e^x \cos(3x) + \frac{3}{10} e^x \sin(3x).$$

Aufgabe 9

a) Ansatz: $h(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$

$\Rightarrow \quad x+3 = \lambda \cdot x + \mu \cdot (2x+1) = (\lambda + 2\mu) x + \mu$

Das ist offensichtlich für $\mu = 3$ und $\lambda = -5$ erfüllt

$\Rightarrow \quad h = -5 \cdot f + 3 \cdot g$

b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot (2x+1)\, dx = \int_0^1 (2x^2 + x)\, dx$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{7}{6}$

$\| g \| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (2x+1)^2\, dx}$

$= \sqrt{\int_0^1 (4x^2 + 4x + 1)\, dx}$

$= \sqrt{\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x\right)\Big|_0^1}$

$= \sqrt{\frac{4}{3} + 2 + 1} = \sqrt{\frac{13}{3}}$

c) $0 = \langle f, h \rangle = \int_0^1 x \cdot (mx+1)\, dx = \int_0^1 (mx^2 + x)\, dx$

$= \left(\frac{1}{3}mx^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}m + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}m = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad m = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 10 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$?

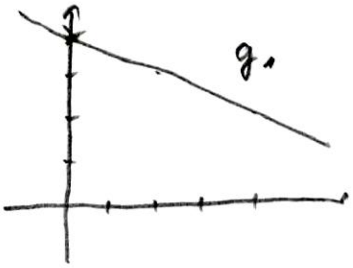
(„×" kennzeichnet dabei stets das Vektorprodukt; „·" kann in den verschiedenen üblichen Bedeutungen vorkommen; „0" bezeichnet einerseits $0 \in \mathbb{R}$ und andererseits $0 \in \mathbb{R}^3$.)

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthalt.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	X		
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$		X	
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$		X	
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{b})$		X	
$(\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$	X		
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$	X		

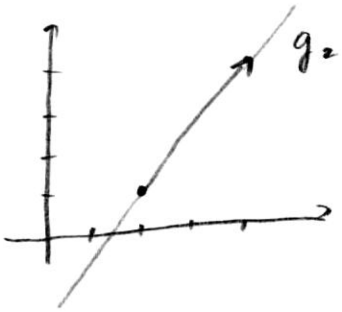
Aufgabe 11

a)



$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b)



b1) Die Steigung ist $m = \frac{3}{2}$. Damit ist

$$g_2(x) = \frac{3}{2}(x-2) + 1 = \frac{3}{2}x - 2$$

b2) Ein Normalenvektor ist $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Eine Normalendarstellung ist also

$$g_2 = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \right\}$$

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Bekanntlich heißt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal genau dann, wenn $A^T \cdot A = I$ gilt.

Füllen Sie die Felder so aus, dass die Matrix orthogonal ist und das Element a_{13} oben rechts positiv ist.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \boxed{1/3} \\ \frac{1}{3} & \boxed{-2/3} & \boxed{+2/3} \\ \boxed{-2/3} & \frac{1}{3} & \boxed{+2/3} \end{pmatrix}.$$

Tipp: Nutzen Sie aus, welche Eigenschaften die Spalten von A haben, wenn A orthogonal ist.

Aufgabe 13

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \\ +2\cdot \mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\frac{3}{2}\cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +2\cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -(-1)\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

$$= 18$$