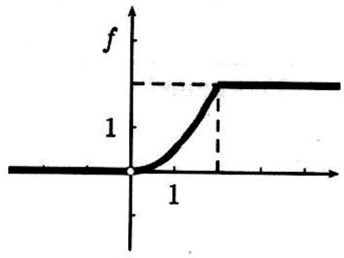
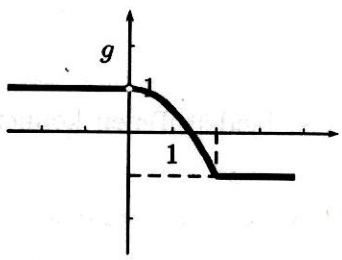
Aufgabe 1 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Funktionsgraf:



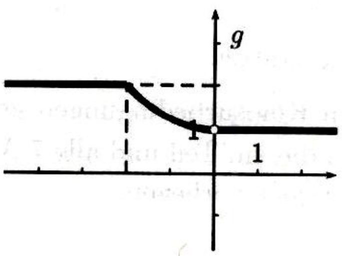
Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen g und f bei folgenden Funktionsgrafen zu g? Notieren Sie die Formel neben die Bildern.

a)



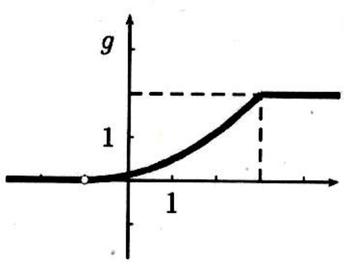
$g(x) = -f(x) + 1$

b)



$g(x) = \frac{1}{2} \cdot f(-x) + 1$

c)



$g(x) = f\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)$

$= f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

Aufgabe 2

a) a1) $g(x) = \frac{0{,}61 - 0{,}21}{0{,}6 - 0{,}4}(x - 0{,}4) + 0{,}21$

$= \frac{0{,}4}{0{,}2}(x - 0{,}4) + 0{,}21$

$= 2x - 0{,}8 + 0{,}21$

$= 2x - 0{,}59$

a2) $g(0{,}54) = 2 \cdot (0{,}54 - 0{,}4) + 0{,}21$

$= 2 \cdot 0{,}14 + 0{,}21$

$= 0{,}28 + 0{,}21 = 0{,}49$

b) 3

c) $f'(0{,}7) \approx$ Steigung in $[0{,}6 ; 0{,}8]$

$= \frac{0{,}33 - 0{,}61}{0{,}8 - 0{,}6}$

$= \frac{-0{,}28}{0{,}2} = -1{,}4$

Aufgabe 3

$$\log_3 \underbrace{\underbrace{\sqrt{x}}_{=x^{1/2}}}_{=\frac{1}{2}\log_3 x} - \log_3 \underbrace{\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{=x^{1/3}}}_{=\frac{1}{3}\log_3 x} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\log_3 x = \frac{1}{3}$$

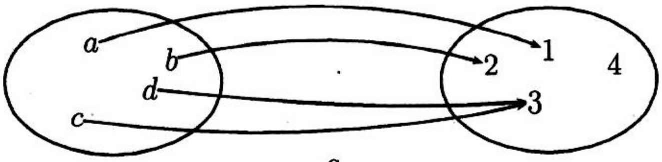
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\cdot\log_3 x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 3^2 = 9$$

Aufgabe 4 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Betrachtet wird zum Einen $f(x) = \sin x$ und zum Anderen die skizzierte Abbildung g



g

jeweils mit verschiedenen Definitions- und Zielbereichen.

Geben Sie jeweils an, ob diese Funktionen mit den jeweils angegebenen Definitions- und Zielbereichen injektiv bzw. surjektiv sind.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (1 Punkt) oder „Enthaltung“ (0.5 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	injektiv			surjektiv		
	ja	nein	Enth.	ja	nein	Enth.
$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$		X			X	
$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$	X			X		
$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$		X		X		
$g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$	X				X	
$g : \{c, d\} \to \{2, 3\}$		X			X	
$g : \{d\} \to \{3\}$	X			X		

Aufgabe 5 (10 Punkte)

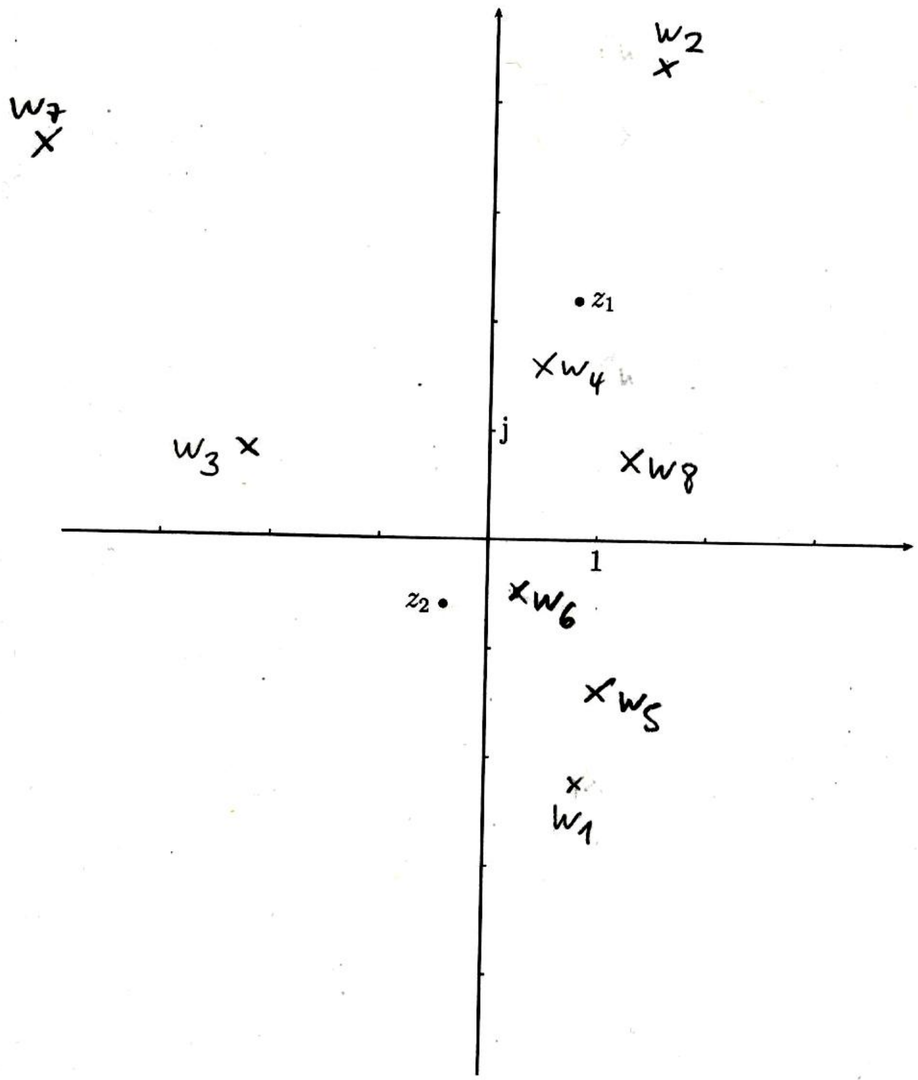
In der unten abgebildeten Gaußschen Zahlenebene sind zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 markiert.

Skizzieren Sie in dem Bild, wo ungefähr die folgenden Zahlen liegen:

$$w_1 = z_1^*, \quad w_2 = 2 \cdot z_1, \quad w_3 = \mathrm{j} \cdot z_1, \quad w_4 = z_1 + z_2, \quad w_5 = z_1 \cdot z_2,$$

$$w_6 = \frac{1}{z_1}, \quad w_7 = z_1^2, \quad \text{ein } w_8 \text{ mit } w_8^2 = z_1.$$

(Sie brauchen nicht zu rechnen.)



Aufgabe 6

1) Es ist $a = 3$

$$|a_n - a| < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3n}{n+2} - 3 \right| < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{3n - 3(n+2)}{n+2} \right| < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{n+2} < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow 6000 < n+2$$

$$\Leftrightarrow n > 5998$$

Also $N = 5999$

2) Es ist $a = 1$.

$$|a_n - a| < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 + \frac{1}{2^n} - 1 \right| < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow 1000 < 2^n$$

Es ist $2^{10} = 1024$, $2^9 = 512$, also $N = 10$.

Aufgabe 7

$$\frac{\sin(2x) - 2x\cos x}{x^3}$$

$$= \frac{1}{x^3} \cdot \Big(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - + \dots$$

$$- 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \dots\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{x^3} \Big(2x - \frac{2^3}{3!} \cdot x^3 + x^5 \cdot (\dots)$$

$$- 2x + x^3 + x^5 \cdot (\dots)\Big)$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(\left(-\frac{4}{3} + 1\right) \cdot x^3 + x^5 \cdot (\dots) \right)$$

$$= -\frac{1}{3} + x^2 \cdot (\dots)$$

$$\xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 8

a) $$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+z)^2 - (x+y) \cdot 2 \cdot (x+z)}{(x+z)^4}$$

$$= \frac{x+z - (x+y) \cdot 2}{(x+z)^3}$$

$$= \frac{z - 2y - x}{(x+z)^3}$$

b) $$g(y) = \frac{x}{(x+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} \cdot y$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{(x+z)^2}$$

c) $$h(z) = (x+y) \cdot (x+z)^{-2}$$

$$\Rightarrow h'(z) = (x+y) \cdot (-2) \cdot (x+z)^{-3}$$

$$= -2 \frac{x+y}{(x+z)^3}$$

Aufgabe 9

Die Fläche $F(a)$ des Rechtecks ist

$$F(a) = a \cdot f(a) = a \cdot (4 - a^2) = 4a - a^3$$

Wegen $F(0) = 0 = F(2)$ liegt die Maximalstelle in $]0;2[$.

Dort muss gelten

$$0 = F'(a) = 4 - 3a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Als einziger Kandidat in $]0;2[$ ist $+\sqrt{\frac{4}{3}}$ die gesuchte Stelle.

Aufgabe 10

a) $\int_{-1}^{2} (x^2-2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x \Big|_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right)$

$= \frac{9}{3} - 6 = -3$

b) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \pi$ 

c) $\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{0}^{1}$

$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$

d) $\int_{0}^{\pi} x \cdot \sin x\,dx = x \cdot (-\cos x) \Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} 1 \cdot (-\cos x)\,dx$

$= \pi \cdot (-\underbrace{\cos\pi}_{=-1}) - 0 + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx}_{=0 \text{ wg. Sym.}}$ 

$= \pi$

Aufgabe 11

$$\int_0^1 x \cdot e^x \, dx \overset{\substack{x = \ln u \\ e^x = u}}{\underset{e^x dx = du}{=}} \int_1^e \ln u \, du$$

Aufgabe 12

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt auf ein LGS mit erw. Koeff. Matrix

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ +2 \cdot I \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ -2 \cdot III \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ :3 \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} +3 \cdot III \\ +4 \cdot III \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -2 \cdot II \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 7 \cdot \vec{v}_1 - 7 \cdot \vec{v}_2 - 3 \vec{v}_3$$

Aufgabe 13

a) Der Richtungsvektor hat die Länge $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

Also haben $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Abstand 2, also

$\begin{pmatrix} 11/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7/3 \\ -4/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$.

b) Gesucht ist $\vec{p} \in g$ mit $\vec{p} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also

$$0 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= 18 + \lambda \cdot 9$$

$\Leftrightarrow \lambda = -2$

$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14 (18 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Ein Backwarenhersteller bietet Produkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ an und nutzt dazu Grundsubstanzen $G_1, G_2, \ldots, G_k$ $(k \neq n)$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

beschreibt die Zusammensetzung der einzelnen Produkte: Für das Produkt P_i sind a_{i1} Einheiten von G_1, a_{i2} Einheiten von G_2 usw. nötig.

Die Preise der Grundprodukte sind im Vektor $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ zusammengefasst (p_i ist der Preis einer Einheit von G_i).

Der Hersteller möchte z_k mal das Produkt P_k herstellen, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Durch welchen Ausdruck lassen sich die entsprechenden Größen darstellen? Kreuzen Sie den richtigen Eintrag (3 Punkte) oder Enthaltung (1 Punkt) an.

	$A \cdot p$	$A^T \cdot p$	$A \cdot z$	$A^T \cdot z$	Enth.
Warenwert der einzelnen Produkte	X				
Einheiten der Grundsubstanzen für die gesamte Produktion				X	

b) Notieren Sie bei den folgenden Ausdrücken

✓, falls der Ausdruck den Gesamtpreis der Produktion angibt,

o, falls man den Ausdruck zwar bilden kann, das Ergebnis aber nicht den Gesamtpreis der Produktion angibt,

↯, falls man den Ausdruck gar nicht bilden kann,

E, falls Sie sich enthalten wollen.

Jeder richtige Eintrag zählt 2 Punkte, Enthaltung 1 Punkt.

$(A \cdot z) \cdot p^T$	$(A \cdot p) \cdot z^T$	$(A \cdot z)^T \cdot p$	$(A \cdot p)^T \cdot z$	$p^T \cdot A \cdot z$	$z^T \cdot A \cdot p$
↯	o	↯	✓	↯	✓

(Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.)