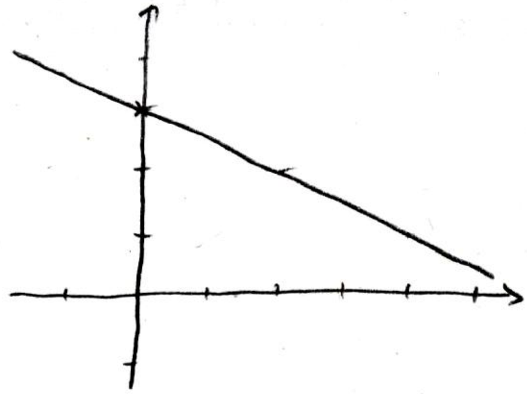
Aufgabe 1



a) Gleiche Steigung.

größerer y-Achsenabschnitt,

z.B.

$h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

b) Gleiche Steigung, durch (2.4):

$h(x) = -\frac{1}{2}(x-2) + 4$

$= -\frac{1}{2}x + 5$

c) Produkt der Steigungen $= -1$, also Steigung 2, z.B.

$h(x) = 2x$

d) Schnittpunkt bei (4,1), kleinere Steigung, z.B.

$h(x) = -(x-4) + 1$

$= -x + 5$

Aufgabe 2 (10 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Markieren Sie den richtigen (gerundeten) Zahlenwert.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2.5 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

$\sqrt{6 \cdot 10^7} \approx$	
$2.45 \cdot 10^2$	
$7.75 \cdot 10^2$	
$2.45 \cdot 10^3$	
$7.75 \cdot 10^3$	X
Enthalt.	

$\frac{1}{7 \cdot 10^4} \approx$	
$1.43 \cdot 10^4$	
$1.43 \cdot 10^{-3}$	
$1.43 \cdot 10^{-4}$	
$1.43 \cdot 10^{-5}$	X
Enthalt.	

$\log_{10}(2 \cdot 10^8) \approx$	
1.208	
8.301	X
16	
$3 \cdot 10^7$	
Enthalt.	

$2^{3^4} \approx$	
$4 \cdot 10^3$	
$2 \cdot 10^{12}$	
$4.2 \cdot 10^{18}$	
$2.4 \cdot 10^{24}$	X
Enthalt.	

Aufgabe 3

a) $p(x) = 2\cdot(x^4 - 3x^2 - 4)$

$= 2\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-4)$

$= 2\cdot(x+j)\cdot(x-j)\cdot(x+2)(x-2)$

NR: $z^2 - 3z - 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = -1$ oder $z = 4$,

also $z^2 - 3z - 4 = (z+1)\cdot(z-4)$

b) $(x^3 - 5x^2 + 7x + 13) : (x+1) = x^2 - 6x + 13$

$-(x^3 + x^2)$

$-6x^2 + 7x$

$-(-6x^2 - 6x)$

$13x + 13$

$-(13x + 13)$

0

$\Rightarrow q(x) = (x+1)\cdot(x^2 - 6x + 13)$

↳ Nst: $3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm 2j$

$= (x+1)\cdot(x-(3+2j))\cdot(x-(3-2j))$

Aufgabe 4 (2 + 4 + 3 = 9 Punkte)

a) Geben Sie eine kartesische Darstellung zu $z = 3 \cdot e^{\frac{\pi}{3}j}$ an:

$$z = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + j \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} j$$

b) Berechnen Sie zu $z_1 = 1 - 2j$ und $z_2 = 3 + j$

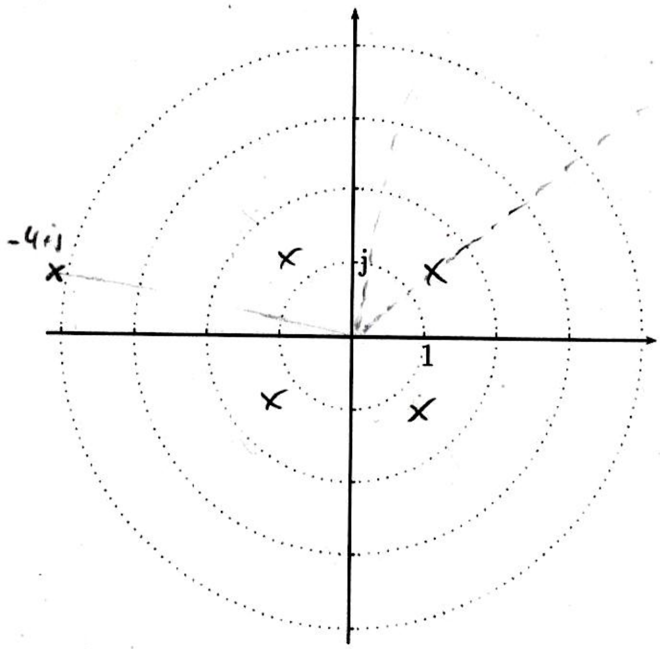
$$z_1 + z_2 = 4 - j$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1-2j) \cdot (3+j) = 3 + j - 6j + 2 = 5 - 5j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1-2j)(3-j)}{(3+j)(3-j)} = \frac{3 - j - 6j - 2}{3^2 + 1} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10} j$$

c) Skizzieren Sie im Koordinatensystem die ungefähre Lage *aller* Lösungen $w \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$w^4 = -4 + j.$$



Aufgabe 5 (7 × 1 = 7 Punkte)

Geben Sie den Wert (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) der folgenden Grenzwerte an.
(Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+4n}{5n-2} = 4/5$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+4)(3n+7)}{(5n+1)^2} = \dfrac{6}{25}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{1-n} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{2-3x}{x-1} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x}{2^x} = \infty$

Aufgabe 6

a) $1\,dm + 0{,}8\,dm + 0{,}8^2\,dm + \dots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}8^k\,dm = \frac{1}{1-0{,}8}\,dm = \frac{1}{0{,}2}\,dm = 5\,dm$$

b) Die Volumina sind

$$(1\,dm)^2 \cdot 1mm = 1 \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$(0{,}8\,dm)^2 \cdot 1mm = 0{,}8^2 \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$(0{,}8^2\,dm)^2 \cdot 1mm = 0{,}8^4 \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow V = (1 + 0{,}8^2 + 0{,}8^4 + 0{,}8^6 + \dots) \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}8^{2k}\right) \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (0{,}8^2)^k\right) \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 0{,}64^k\right) \cdot \frac{1}{100}\,dm^3$$

$$= \frac{1}{1-0{,}64} \cdot \frac{1}{100}\,dm^3 = \frac{1}{0{,}36} \cdot \frac{1}{100}\,dm^3 = \frac{1}{36}\,dm^3$$

c) $0{,}8^k\,dm = 0{,}8^k \cdot 100\,mm > 1\,mm$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}8^k > \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \quad k < \log_{0{,}8} \frac{1}{100}$$

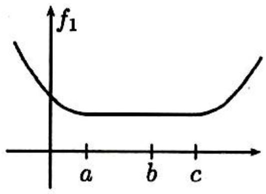
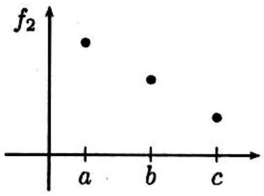
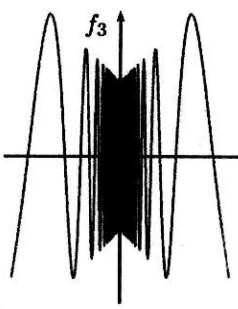
Es sind also $\lfloor \log_{0{,}8} \frac{1}{100} \rfloor + \underset{\text{für } k=0}{\underset{\uparrow}{1}}$ Plättchen

Aufgabe 7 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Bekanntlich ist zu einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, die Stelle $x_0 \in D$ eine *lokale Minimalstelle* bzw. *Maximalstelle* genau dann, wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$ gilt $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) \leq f(x_0)$.

Sind die im Folgenden dargestellten Stellen jeweils lokale Minimal- oder Maximalstellen der entsprechenden Funktionen? Kreuzen Sie die richtige Antwort (1 Punkt) oder Enthaltung (0,5 Punkte) an.

Hinweis: Unterhalb der Tabelle gibt es exakte Angaben zu den abgebildeten Funktionen.

		ja	nein	Enth.
	a ist lok. Min.stelle	X		
	a ist lok. Max.stelle		X	
	b ist lok. Min.stelle	X		
	b ist lok. Max.stelle	X		
	a ist lok. Min.stelle	X		
	a ist lok. Max.stelle	X		
	b ist lok. Min.stelle	X		
	b ist lok. Max.stelle	X		
	0 ist lok. Min.stelle		X	
	0 ist lok. Max.stelle		X	

- Die Funktion f_1 ist stetig, für $x < a$ streng monoton fallend, in $[a, c]$ konstant und für $x > c$ streng monoton wachsend.
- Die Funktion f_2 hat als Definitionsgebiet nur die drei Stellen a, b und c.
- Für $x \neq 0$ ist $f_3(x) = (1 + |x|) \cdot \cos \frac{6}{x}$ und $f_3(0) = 1$.

Aufgabe 8

a) $f'(x) = 2\cos(2x)$

$f''(x) = -2^2 \sin(2x)$

$f'''(x) = -2^3 \cos(2x)$

$\dots$

$f^{(2025)}(x) = 2^{2025} \cdot \cos(2x)$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -(x)^{-2}$

$f''(x) = -(-2) \cdot x^{-3} = 2 \cdot x^{-3}$

$f'''(x) = -3 \cdot 2 \cdot x^{-4}$

$f^{(4)}(x) = +4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^{-5}$

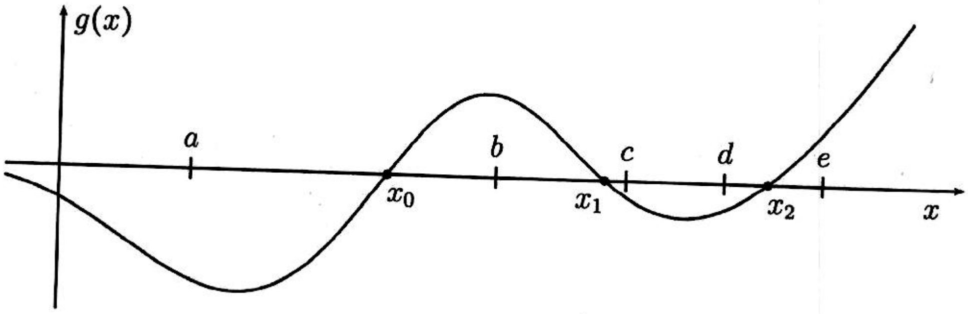
$\dots$

$f^{(2025)}(x) = -2025! \cdot x^{-2026}$

Aufgabe 9 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Konvergiert das Newton-Verfahren zur abgebildeten Funktion g bei dem entsprechenden Startwert, und wenn ja, gegen welchen Wert?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.



(Hinweis: Die Stelle b liegt ein bisschen rechts von der Maximalstelle.)

Startwert	konvergiert gegen x_0	konvergiert gegen x_1	konvergiert gegen x_2	konv. nicht	Enth.
a				X	
b			X		
c		X			
d			X		
e			X		

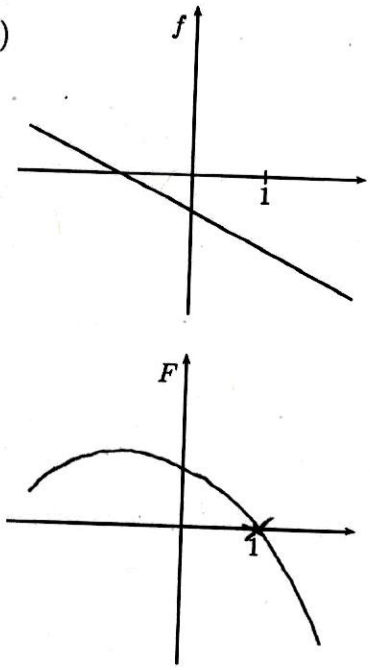
Aufgabe 10 (3 × 2 = 6 Punkte)

Skizzieren Sie in den unteren Koordinatensystemen jeweils die Flächenfunktion

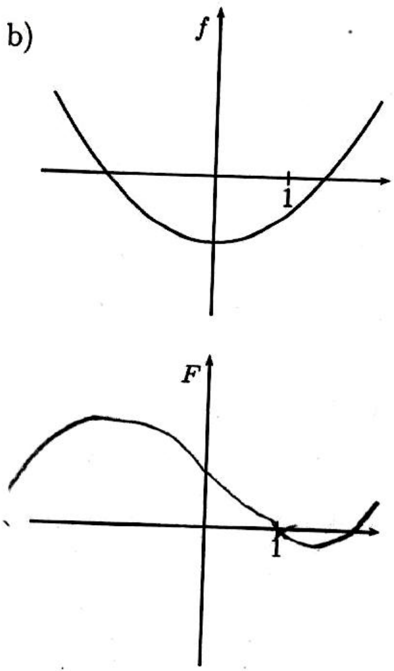
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

zu der oben abgebildeten Funktion. (Sie brauchen nicht zu rechnen.)

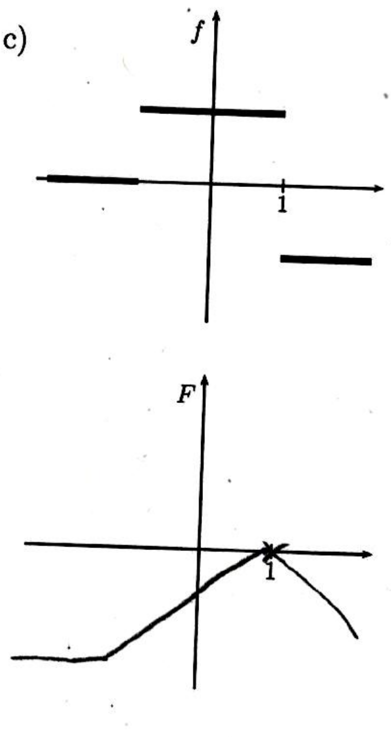
a)



b)



c)



Aufgabe 11

a) $\int (7x+2)^4 \, dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (7x+2)^5 = \frac{1}{35} (7x+2)^5$

b) $\int x \cdot \sin(4x) \, dx = x \cdot \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) - \int 1 \left(-\frac{1}{4}\cos(4x)\right) dx$

$= -\frac{1}{4} x \cdot \cos(4x) + \frac{1}{4} \int \cos(4x) \, dx$

$= -\frac{1}{4} x \cos(4x) + \frac{1}{16} \sin(4x)$

Aufgabe 12

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}9\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix}9\\1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-6\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-5\end{pmatrix}$

Dies ist offensichtlich für $\lambda = 2$ und $\mu = 3$ erfüllt

$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich

b) Abstand $d(t) = \| f_2(t) - f_1(t) \|$

$$= \left\| \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}9\\1\\2\end{pmatrix} \right) \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix}0\\-1\\-5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}-3t\\-1\\-5+t\end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{9t^2 + 1 + (-5+t)^2}$$

Offensichtlich gilt $d(t) \to \infty$ für $t \to \pm\infty$, d.h. es gibt eine Minimalstelle in $\mathbb{R}$. Dort muss gelten

$$0 = d'(t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\dots}} \cdot \left(18t + 2 \cdot (-5+t)\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 18t - 10 + 2t = 20t - 10$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$

Als einziger Kandidat ist $t = \frac{1}{2}$ die gesuchte Zeit.

Aufgabe 13

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot \mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -4\cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :3 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3\cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Lsgen sind $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14 (12 Punkte)

Geben Sie rechts Werte für die Parameter an, so dass die Gleichungen links stimmen!

Falls es mehrere entsprechende Werte gibt, reicht einer.

Hinweise:

- Sie können davon ausgehen, dass es jeweils mindestens einen passenden Parameterwert gibt.
- Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.
  Wenn Sie auf dem Blatt rechts leserlich Herleitungen notieren, können Sie aber ggf. auch Teilpunkte bekommen, wenn Ihr Ergebnis falsch ist.

a)	$\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$a = -6$
b)	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$	$a = 2$ $b = 3$
c)	$\left\lVert \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rVert = 1$	$\lambda = 1/5$
d)	$\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$a = -1$ $b = 2$ $c = 1$ $d = 2$
e)	$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$	$a = -1$ $b = 3$ $c = -2$
f)	$\det \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1$	$a = -1$