Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion.

Welche Symmetrien ergeben sich bei den angegebenen Funktionen h?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „E." für Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	gerade	ungerade	im Allgemeinen keines von beiden	E.
$h(x) = -f(x)$	X			
$h(x) = -g(x)$		X		
$h(x) = f(x) + 2$	X			
$h(x) = g(x) + 2$			X	
$h(x) = f(x) + g(x)$			X	
$h(x) = f(x) \cdot g(x)$		X		

Aufgabe 2 (3 + 5 = 8 Punkte)

Betrachtet wird die Erwärmung eines mit Wasser gefüllten Topfs auf einer Herdplatte.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Wasser die Temperatur T_0. Die Herdplatte hat die Temperatur T_1.

a) Mit welcher der folgenden Funktionen lässt sich sinnvollerweise die Temperatur $T(t)$ des Wassers im Laufe der Zeit t modellieren? (Der Parameter k beschreibt dabei den Wärmeübergang.)

Kreuzen Sie (nur) die richtige Funktion an.

$T(t) = T_0 + T_1 \cdot e^{-kt}$	
$T(t) = T_1 + T_0 \cdot e^{-kt}$	
$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot e^{-kt}$	
$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot e^{-kt}$	X
$T(t) = (T_1 - T_0) + T_0 \cdot e^{-kt}$	
$T(t) = (T_0 - T_1) + T_1 \cdot e^{-kt}$	

Nutzen Sie Ihre ausgewählte Funktion für den folgenden Aufgabenteil.

(Falls Sie sich bei a) nicht entscheiden können, wählen Sie irgendeine Funktion daraus aus.)

b) Sei nun konkret $T_0 = 20°$ C und $T_1 = 100°$ C.

Nach welcher Zeit hat das Wasser die Temperatur $T = 90°$ C, wenn $k = \frac{\ln 2}{100}$ mit Einheit $\frac{1}{\text{Sekunde}}$ ist?

(Ihre Angabe soll kein „ln" mehr enthalten.)

Gesucht: t mit

$$90° = 100° + (20° - 100°) \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad -10° = -80° \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{8} = e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln \frac{1}{8} = -k \cdot t = -\frac{\ln 2}{100} [s^{-1}] \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{100}{\ln 2} \cdot \ln \frac{1}{8} [s] = -\frac{100}{\ln 2} \cdot (-\ln 8) [s] = 100 \cdot \underbrace{\frac{\ln 8}{\ln 2}}_{= \log_2 8 = 3} [s] = 300 [s]$$

Aufgabe 3 (5 + 3 + 3 + 4 = 15 Punkte)

Sei $w = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} \cdot j}$ und

$$z_k = w^k \qquad \text{sowie} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

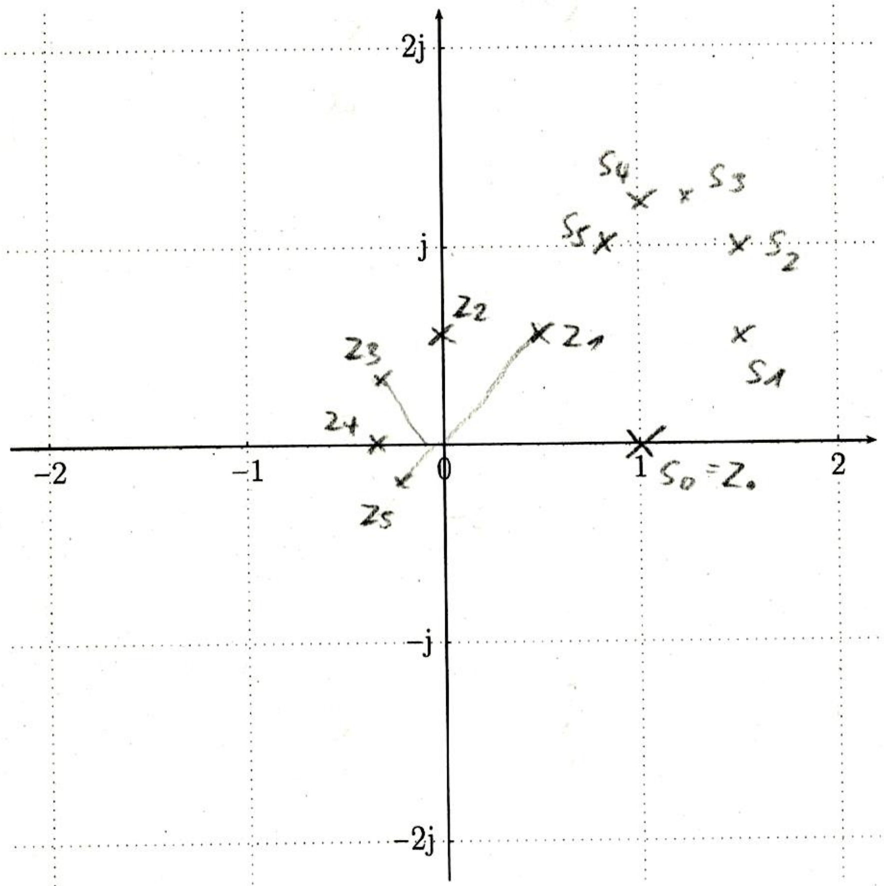
a) Geben Sie die folgenden drei Werte in kartesischer Darstellung, also in der Form $a + bj$, an:

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$ $\qquad$ $z_2 = \frac{1}{2}j$ $\qquad$ $z_{2024} = \frac{1}{2^{1012}}$

b) Geben Sie die folgenden drei Werte in kartesischer Darstellung, also in der Form $a + bj$, an:

$s_0 = 1$ $\qquad$ $s_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$ $\qquad$ $s_2 = \frac{3}{2} + j$

c) Markieren Sie im Koordinatensystem die Lage von $z_0, z_1, \ldots z_5$ sowie von $s_0, s_1, \ldots s_5$. Schreiben Sie an Ihre Markierungen, was $z_0, z_1, \ldots z_5$ bzw. $s_0, s_1, \ldots s_5$ ist.



d) Welchen Wert hat $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$?

$$\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 1+j$$

Aufgabe 4 (15 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sind die angegebenen Folgen konvergent?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

a) $a_n = \cos \frac{1}{n}$.

b) $b_n = \frac{1}{\cos n}$.

c) $c_n = 0$ für alle n, die nicht durch 10 teilbar sind;
ist n Vielfaches von 10, so ist $c_n = \frac{1}{n}$.

d) $d_n = 1$ für alle n außer für Zehnerpotenzen;
ist $n = 10^k$, so ist $d_n = \frac{1}{n}$.

e) e_n ist gleich der n-ten Nachkommaziffer in der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1.4142...$, also

$$e_1 = 4, \qquad e_2 = 1, \qquad e_3 = 4, \qquad e_4 = 2, \qquad \ldots.$$

f) f_n ist gleich der nach der n-ten Nachkommaziffer abgeschnittenen Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1.4142...$, also

$$f_1 = 1.4, \qquad f_2 = 1.41, \qquad f_3 = 1.414, \qquad f_4 = 1.4142, \qquad \ldots.$$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Enthaltung						
nicht konvergent		X		X	X	
konvergent	X		X			X
mit Grenzwert	1		0			$\sqrt{2}$

Aufgabe 5

a) Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{[(x-1)^3]^2} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x-1-3x)}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{-2x-1}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (x-1)^4 - (-2x-1) \cdot 4 \cdot (x-1)^3}{[(x-1)^4]^2}$$

$$= \frac{(x-1)^3 \cdot (-2(x-1) + (2x+1) \cdot 4)}{(x-1)^8}$$

$$= \frac{6x+6}{(x-1)^5}$$

Kandidaten für Extremstellen:

$$0 = f'(x) = \frac{-2x-1}{(x-1)^4} \Leftrightarrow 0 = -2x-1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Es ist $f''(-\frac{1}{2}) = \frac{-3+6}{(-\frac{3}{2})^5} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}$ ist Maxstelle

Kandidaten für Wendestelle:

$$0 = f''(x) = \frac{6x+6}{(x-1)^5} \Leftrightarrow 0 = 6x+6$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Offensichtlich hat f'' bei -1 einen Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow -1$ ist Wendestelle

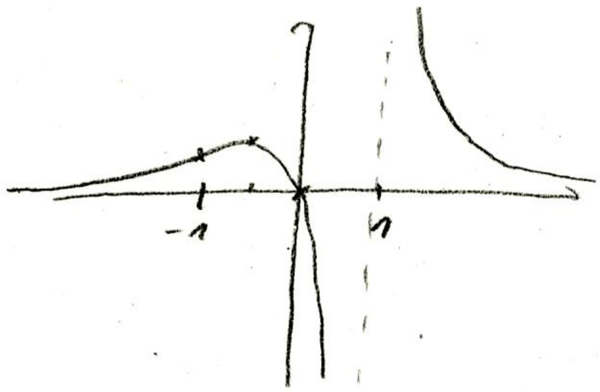
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

c)



Aufgabe 6

Gesucht: Nullstelle von $f(x) = x^3 - 4$

a) Es ist $f'(x) = 3x^2$

$\rightarrow$ Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 4}{3x_n^2}$$

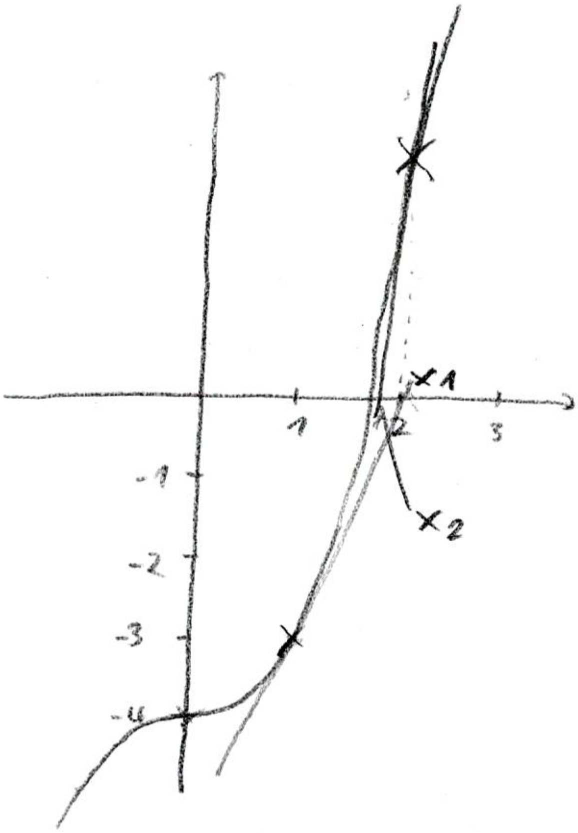
$$= x_n - \frac{1}{3} x_n + \frac{4}{3x_n^2}$$

$$= \frac{2}{3} x_n + \frac{4}{3x_n^2}$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3 \cdot 1^2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3 \cdot 2^2} = \frac{5}{3}$$

b)



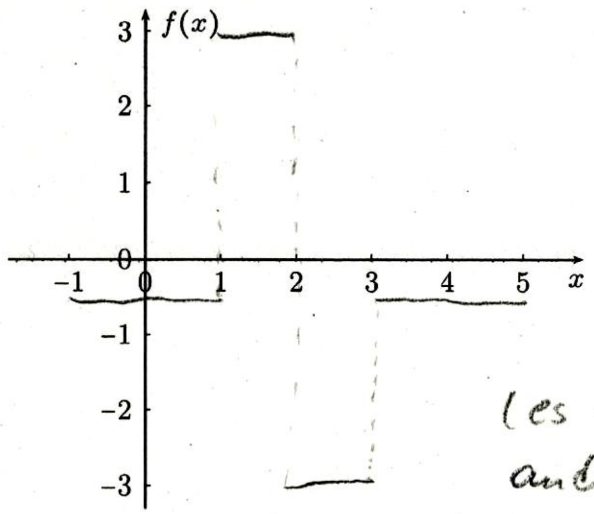
Aufgabe 7 (5 Punkte)

Skizzieren Sie in dem Koordinatensystem für $x \in [-1, 5]$ eine Funktion f so, dass für die Flächenfunktion

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

gilt

$$F(-1) = 1, \quad F(2) = 3, \quad F(3) = 0 \quad \text{und} \quad F(5) = -1.$$



(es gibt auch viele andere Lösungen)

Aufgabe 8 (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int\limits_0^{\pi} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{3}\cos(3\pi) - \left(-\frac{1}{3}\cos 0\right)$

$= -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

b) $\int\limits_0^{2} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x = \ln|x-3|\Big|_0^{2}$

$= \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 3 = -\ln 3$

c) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}\Big|_1^{\infty}$

$= 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{6}$

Aufgabe 9

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4 - 1 + 0 = 3$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) $$\varphi = \arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}$$

$$= \arccos \frac{3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{36}} = \arccos \frac{1}{2}$$

$$= 60°$$

c) $$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Gesucht: λ, μ mit $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dies ist offensichtlich für $\lambda = -2$ und $\mu = 3$ erfüllt.

$\Rightarrow$ Ja, es geht.

Aufgabe 10

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A \cdot \begin{pmatrix} 2€ \\ 1€ \\ 3€ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 € \\ 4 € \\ 4 € \end{pmatrix}$

b) $A^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow G_1 \\ \leftarrow G_2 \\ \leftarrow G_3 \end{matrix}$

c) Gesucht: $\vec{x}$ mit $A^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3\,I \\ -2 \cdot I \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +2 \cdot II \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +II \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Sie muss 1 mal P_1, 2 mal P_2 und 2 mal P_3 produzieren

Aufgabe 11

A nicht inv.bar $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

Es ist $\det A = -1 + 0 + 3a - (-2a) - 9 - 0$

$= 5a - 10$

Also: A nicht inv.bar $\Leftrightarrow$ $5a - 10 = 0$

$\Leftrightarrow$ $a = 2$