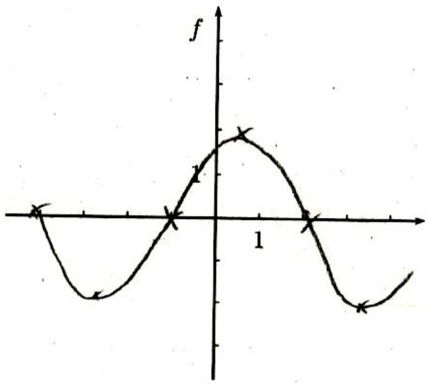
Aufgabe 1 (10 Punkte)

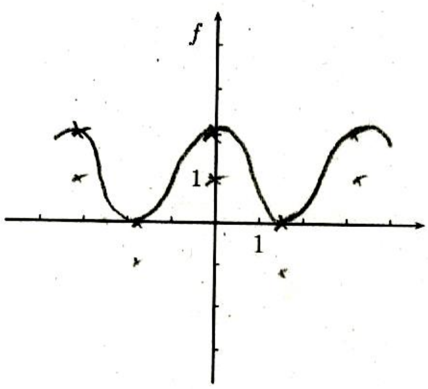
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



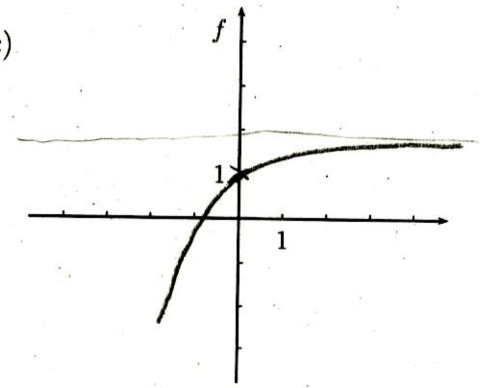
$f(x) = 2 \cdot \sin(x+1)$

b)



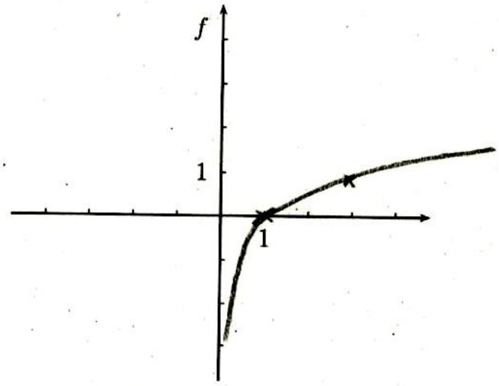
$f(x) = \cos(2x) + 1$

c)



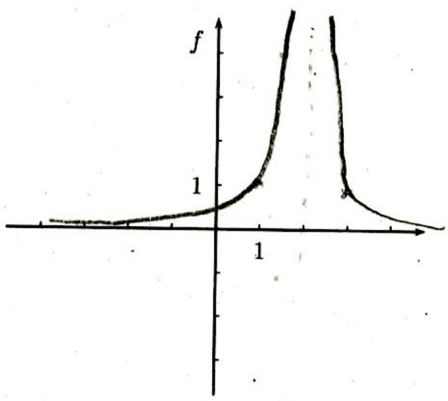
$f(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$

d)



$f(x) = \log_3 x$

e)



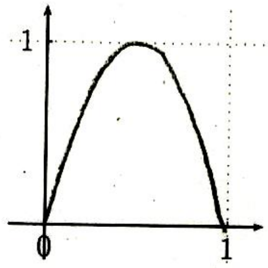
$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

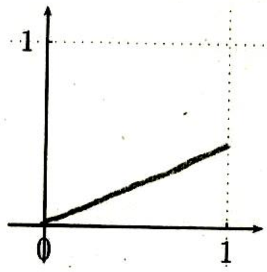
a) Zeichnen Sie in die jeweiligen Koordinatensysteme den Funktionsgraphen einer Funktion

$$f : [0,1] \to [0,1],$$

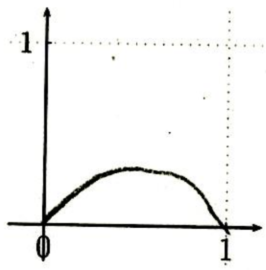
1) die surjektiv, aber nicht injektiv ist:



2) die injektiv, aber nicht surjektiv ist:



3) die weder injektiv noch surjektiv ist:



b) Geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift einer Funktion

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

an (muss nicht mit Ihren Skizzen aus a) übereinstimmen),

1) die surjektiv, aber nicht injektiv ist:

$$f(x) = -4 \cdot x \cdot (x-1)$$

2) die injektiv, aber nicht surjektiv ist:

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

3) die weder injektiv noch surjektiv ist:

$$f(x) = -x \cdot (x-1)$$

Aufgabe 3

Ansatz: $p(z) = a \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2)$ mit

$$4-2j = p(1+2j) = a \cdot (1+2j - (2+j)) \cdot (1+2j - (3-2j))$$
$$= a \cdot (-1+j) \cdot (-2+4j)$$
$$= a \cdot (2 - 4j - 2j - 4)$$
$$= a(-2-6j)$$

$$\Rightarrow a = \frac{4-2j}{-2-6j} = \frac{2-j}{-1-3j} = \frac{(2-j)(-1+3j)}{1+9}$$

$$= \frac{-2+6j+j+3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}j$$

$$\Rightarrow p(z) = \left(\frac{1}{10} + \frac{7}{10}j\right) \cdot \left(z - (2+j)\right) \cdot \left(z - (3-2j)\right)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sind die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n-1}{n} \quad \text{und} \quad b_n = a_{n+1} - a_n.$$

Geben Sie die Werte der folgenden Grenzwerte und Summen an:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

d) $\sum\limits_{n=1}^{30} b_n = b_1 + .. + b_{30} = (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \dots + (a_{31} - \cancel{a_{30}}) = -a_1 + a_{31}$

$= -2 + \frac{92}{31} = \frac{30}{31}$

Tipp: Teleskopsumme.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \overset{\text{wie d)}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} (-a_1 + a_N) \overset{a)}{=} -a_1 + 3$

$= -2 + 3 = 1$

Tipp: Betrachten Sie $\sum_{n=1}^{N} b_n$.

Aufgabe 5

a) Nach s Schritten hat man ein Intervall der Länge $\left(\frac{1}{2}\right)^s$

also $\left(\frac{1}{2}\right)^s \approx 10^{-n}$ NR: $2^{10} \approx 1000 = 10^3$

$\approx \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{-n}$ $\Rightarrow 2^{10/3} \approx 10$

$= \dfrac{1}{2^{\frac{10}{3}\cdot n}}$

$\Rightarrow s \approx \frac{10}{3} n$

b) Für einen Schritt sind ~~[illegible]~~ 9 Auswertungen nötig (nur die inneren Stellen; die Auswertung außen hat man ja schon vom Schritt vorher)

Für die Genauigkeit 10^{-n} sind n Schritte nötig, also $9 \cdot n$ Auswertungen.

c) Beim üblichen Verfahren braucht man pro Schritt eine Auswertung, also insges. $\frac{10}{3} n$ Auswertungen.

Wegen $\frac{10}{3} < 9$ ist das weniger als bei b)

Aufgabe 6

Mit $f(x) = \frac{1}{x}$

ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$

$$T_{2;x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$
$$= \frac{1}{x_0} + \frac{-1}{x_0^2} (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x_0^3} (x - x_0)^2$$

Es soll gelten:

$$2 = T_{2;x_0}(0) = \frac{1}{x_0} + \frac{-1}{x_0^2} \cdot (0 - x_0) + \frac{1}{x_0^3} (0 - x_0)^2$$
$$= \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}$$
$$= \frac{3}{x_0}$$

$\Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 7

a) $$w = \frac{(10\,\frac{m}{s})^2}{2\cdot 10\,\frac{m}{s^2}} + \sqrt{\left(\frac{(10\,\frac{m}{s})^2}{2\cdot 10\,\frac{m}{s}}\right)^2 + \frac{4m\,(10\,\frac{m}{s})^2}{10\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$= 5m + \sqrt{25m^2 + 40m^2}$$

$$= (5 + \underbrace{\sqrt{65}}_{\approx 8})\,m \approx 13m$$

b) Als Funktion von h ist

$$w'(h) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 + \frac{hv^2}{g}}} \cdot \frac{v^2}{g}$$

und $$\Delta w \approx w'(4m)\cdot \Delta h$$

$$= w'(4m)\cdot 0{,}2m$$

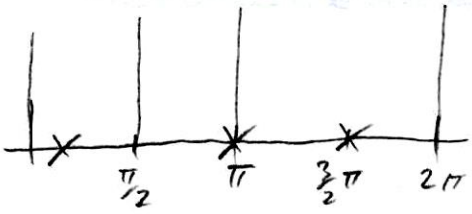
$$\approx \frac{1}{2\cdot\sqrt{65}\,m}\cdot\frac{(10\,\frac{m}{s})^2}{10\,\frac{m}{s^2}}\cdot 0{,}2m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{65}}\,m$$

$$\approx \frac{1}{8}\cdot m = 0{,}125\,m$$

Aufgabe 8

a)



$$S = f\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cdot\tfrac{\pi}{2} + f(\pi)\cdot\tfrac{\pi}{2} + f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\cdot\pi$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\underbrace{\sin\pi}_{=0}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=-1}\cdot\pi$$

$$= \frac{\pi^2}{24} + 0 - \frac{3}{2}\pi^2$$

$$= -\frac{35}{24}\pi^2$$

b) $$\int_0^{2\pi} x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{1\cdot(-\cos x)\,dx}_{\text{wg. Sym.}}$$

$$= -2\pi\cdot 1 - 0 + 0$$

$$= -2\pi$$

Aufgabe 9

Legt man den Koordinatenursprung an die Stelle von Kamera 1, so ist die Sicht von Kamera 1 die

Gerade $g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Die Kamera 2 steht dann bei $\begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und ihre Sichtgerade

ist $g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Der Ball ist im Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 13\lambda + 17\mu &= 90 \\ 5\lambda - 5\mu &= 0 \\ -\lambda + \mu &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \lambda = \mu \text{ und } \underbrace{13\lambda + 17\lambda}_{=30\lambda} = 90$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

Die x_2-Koordinate ist also $3 \cdot 5 = 15$ und damit noch vor der Torlinie, also innerhalb des Spielfelds.

Aufgabe 10

Wegen 2) ist $u_2 - u_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lsg. des hom. LGS

Wegen 1) ist dann

$$L_h = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lsg.smenge des hom. LGS

$\Rightarrow$ Die Lsgs.menge des inhom. LGS ist

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Wegen $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $x_1 \in L_i$,

also Lsg. des inhom. LGS.

Wegen der letzten Komponente sieht man, dass $x_2 \notin L_i$ ist,

also ist x_2 nicht Lsg des inhom. LGS.

Aufgabe 11

a) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{III} \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$