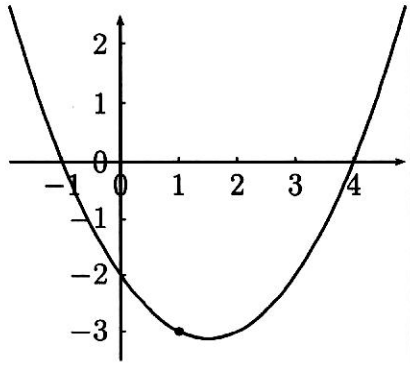
Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

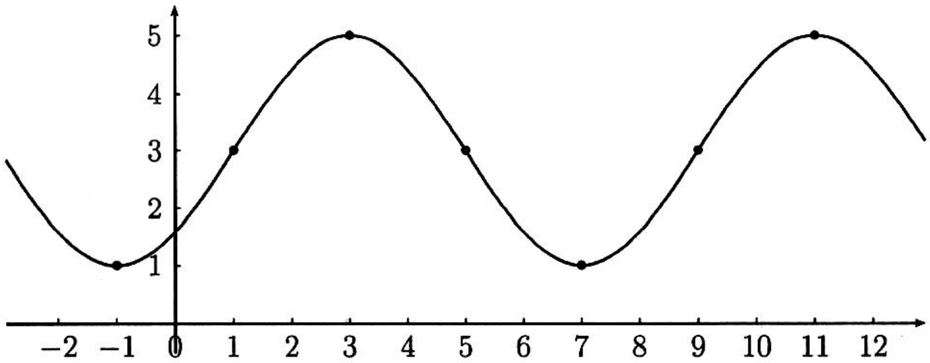
Bei den im Folgenden dargestellten Funktionsgraphen sind die Nullstellen, die Koordinaten der markierten Punkte und bei c) die Definitionslücken jeweils ganzzahlig.

a) Geben Sie eine quadratische Funktion f an, die den nebenstehenden Funktionsgraphen besitzt.



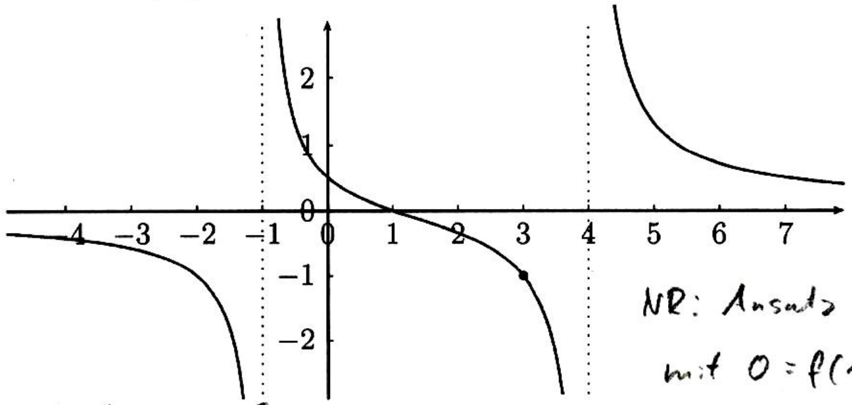
$f(x) = (x+1)\cdot(x-4)\cdot\frac{1}{2}$

b) Geben Sie eine Funktion f an, die den folgenden Funktionsgraphen besitzt.



$f(x) = 3 + 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)$ alternativ: $3+2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-3)\right)$ o.Ä.

c) Geben Sie eine gebrochen rationale Funktion f der Form $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ an, die den folgenden Funktionsgraphen besitzt.



NR: Ansatz $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$

mit $0 = f(1) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{3}B$ I

$-1 = f(3) = \frac{1}{4}A - B$ II

3I−II: $1 = \frac{5}{4}A \Rightarrow A = \frac{4}{5}$

aus I: $\frac{1}{3}B = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow B = \frac{6}{5}$

$f(x) = \frac{4/5}{x+1} + \frac{6/5}{x-4}$

$= \frac{\frac{4}{5}(x-4) + \frac{6}{5}(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \frac{2x-2}{x^2-3x-4}$

Alternativ: Ansatz: Wegen Nst −1 ist $f(x) = \frac{C\cdot(x-1)}{(x+1)(x-4)}$

mit $-1 = f(3) = \frac{C\cdot 2}{4\cdot(-1)} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \ldots$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Geben Sie die Werte der folgenden Ausdrücke an:

$$\sin\left(\frac{11}{2}\pi\right) = -1$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$9^{0.5} = 3$$

$$0.5^{-2} = 4$$

$$\log_3 81 = 4$$

$$\sqrt[3]{8000} = 20$$

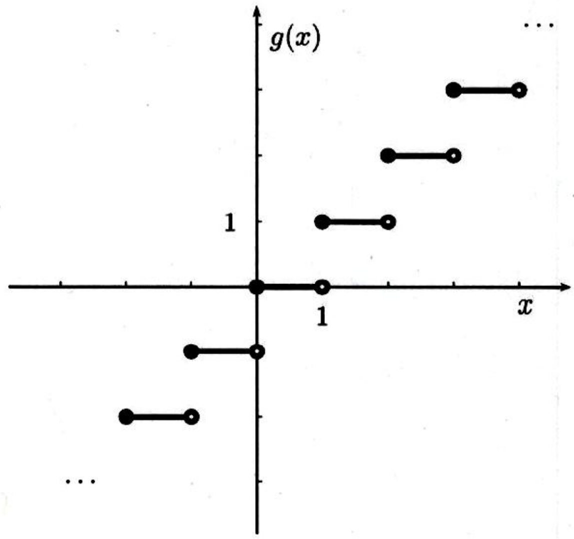
Aufgabe 3 (6 Punkte)

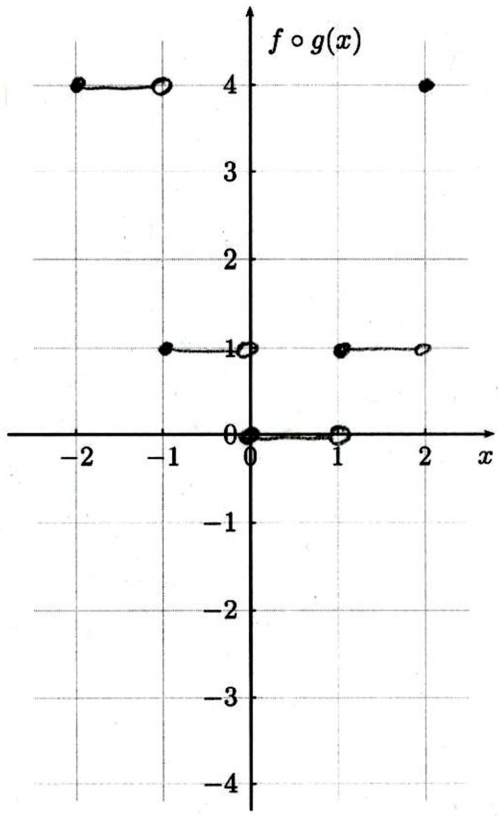
Gegeben ist die Funktion

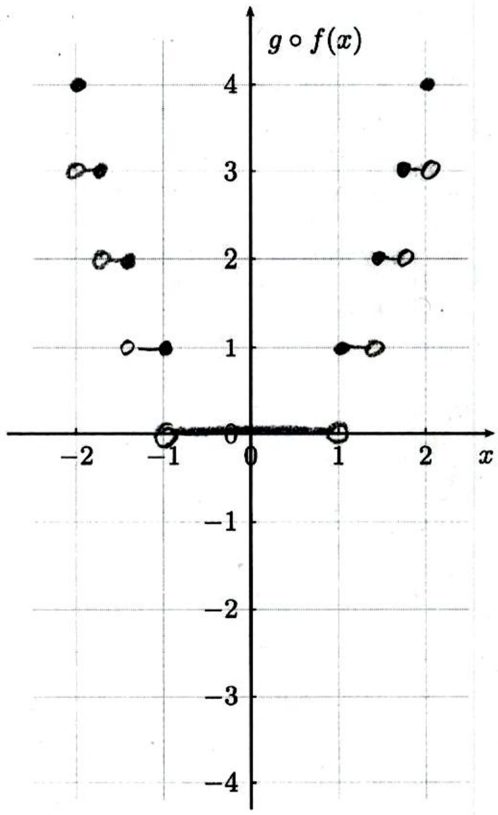
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

sowie die nebenstehende Treppenfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tragen Sie in die Koordinatensysteme die Funktionsgraphen zu den Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ für $x \in [-2, 2]$ ein!







Aufgabe 4 (4 + 4 = 8 Punkte)

a) Markieren Sie die richtige alternative Darstellung (gerundet) der folgenden komplexen Zahlen. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

$-4+7j =$	
$11 \cdot e^{-1.05j}$	
$11 \cdot e^{1.47j}$	
$11 \cdot e^{2.09j}$	
$8.06 \cdot e^{-1.05j}$	
$8.06 \cdot e^{1.47j}$	
$8.06 \cdot e^{2.09j}$	X

$3 \cdot e^{\frac{\pi}{3}j} =$	
$1.5 + 2.598j$	X
$1.5 - 2.598j$	
$-1.5 + 2.598j$	
$2.598 + 1.5j$	
$-2.598 + 1.5j$	
$2.598 - 1.5j$	

b) Berechnen Sie

b1) $(2+j)\cdot(4-3j) = 8 - 6j + 4j + 3 = 11 - 2j$

b2) $\frac{2+j}{4-3j} = \frac{(2+j)(4+3j)}{16+9} = \frac{8+6j+4j-3}{25} = \frac{5+10j}{25}$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j$

Aufgabe 5

a) $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 2$

$a_0 = 0$

$a_1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$

$a_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 1$

$a_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = 3/2$

$a_4 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 = 5/4$

b) Für den Grenzwert $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ gilt

$a = -\frac{1}{2} a + c$

$\Rightarrow \frac{3}{2} a = c$

$\Rightarrow a = \frac{2}{3} c$

b1) $c = 2 \Rightarrow a = 2/3 \cdot 2 = 4/3$

b2) $1 = 2/3\, c \Rightarrow c = 3/2$

Aufgabe 6 (3 + 3 = 6 Punkte)

Wie lauten die Koeffizienten a_k, $k = 0, \dots, 4$, zur Potenzreihenentwicklung von f (also $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$) zu

a) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$,

b) $f(x) = \cos(2x)$.

Tragen Sie die Koeffizienten als gekürzten Bruch in die folgende Tabelle ein.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a)	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
b)	1	0	-2	0	$\frac{2}{3}$

a) $f(x) = x \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right)$

$= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots$

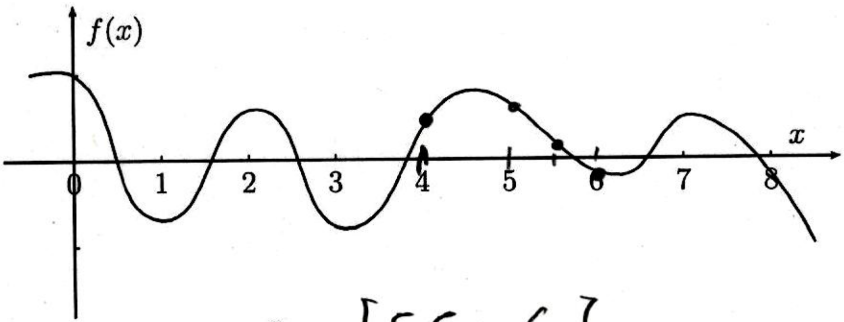
b) $f(x) = 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - + \dots$

$= 1 - \frac{1}{2} \cdot 4x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2^4 x^4 - + \dots$

$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 - + \dots$

Aufgabe 7 (2 + 4 = 6 Punkte)

a) Welches Intervall I (der Länge 0.5) erhält man, wenn man bei der dargestellten Funktion f vier Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend vom Intervall $[0, 8]$ durchführt?

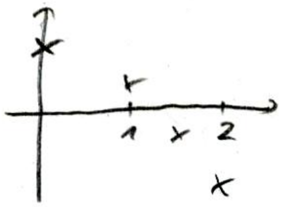


$I = [5{,}5 ; 6]$

b) Führen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend vom Intervall $[0, 2]$ zur Funktion

$$f(x) = 6 - 4x - x^3$$

durch und geben Sie ein Intervall der Länge 0.5 an, in dem eine Nullstelle liegt.



$f(0) = 6 > 0$

$f(2) = 6 - 8 - 8 < 0$

$\Rightarrow$ Nst in $[0 ; 2]$

$f(1) = 6 - 4 - 1 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Nst in $[1 ; 2]$

$f(1.5) = 6 - 4 \cdot 1.5 - 1.5^3$

$= 6 - 6 - 1.5^3 < 0$

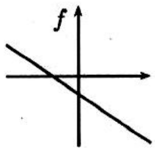
$\Rightarrow$ Nst in $[1 ; 1.5]$

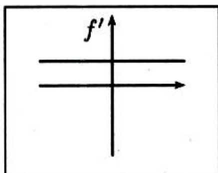
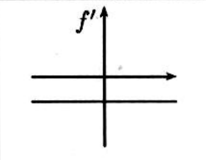
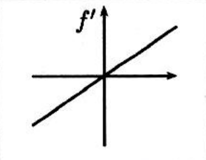
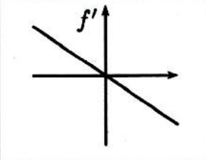
Aufgabe 8 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

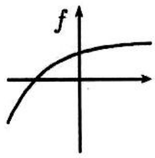
Welche der rechts skizzierten Funktionen entspricht der Ableitung der links dargestellten Funktion?

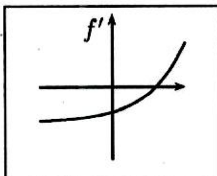
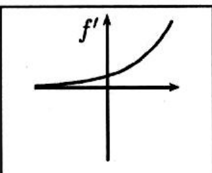
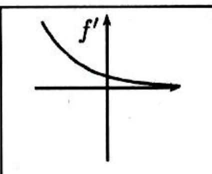
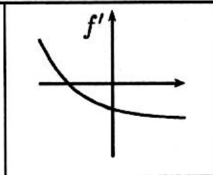
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „E“ für Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

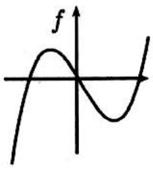
Hinweis: Es ist jeweils eine richtige Ableitung dargestellt.

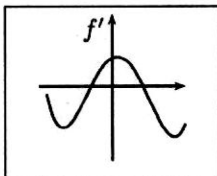
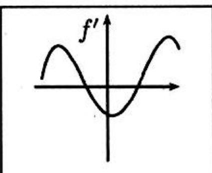
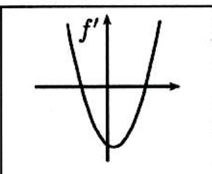
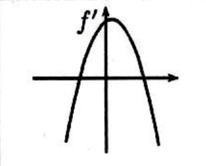
a) 

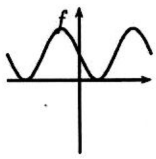
				E
	x			

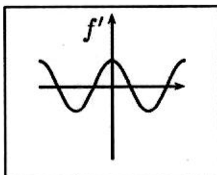
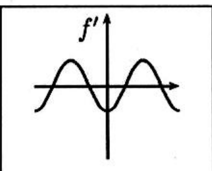
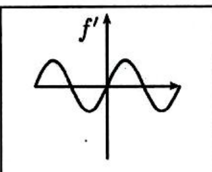
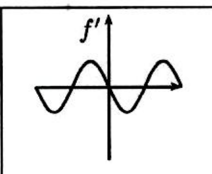
b) 

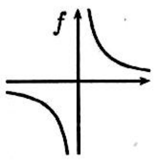
				E
		x		

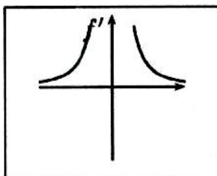
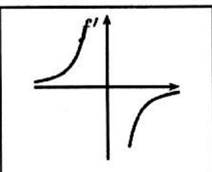
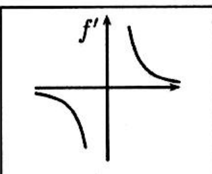
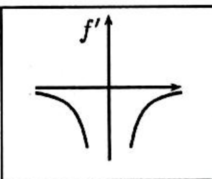
c) 

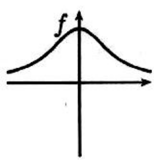
				E
		x		

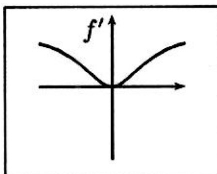
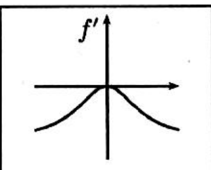
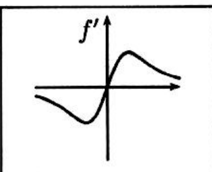
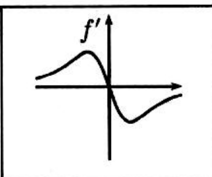
d) 

				E
	x			

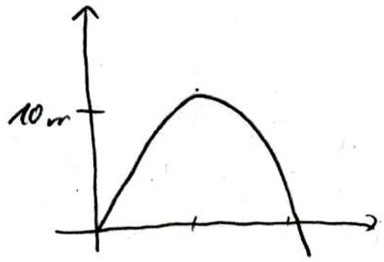
e) 

				E
			x	

f) 

				E
			x	

Aufgabe 9



Die Max-Stelle wird erreicht, wenn gilt

$$0 = h'(x) = 1 - \frac{g}{v_0^2} \cdot 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Dort soll die Höhe 10m sein:

$$10m = h\left(\frac{v_0^2}{2g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{v_0^2} \cdot \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{4g} = \frac{v_0^2}{4g}$$

$$\Rightarrow \quad v_0^2 = 10m \cdot 4g = 4 \cdot 10^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = 20 \,\frac{m}{s}.$$

Aufgabe 10

a) $f'(x) = \frac{1}{c} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$F(x) = \frac{1}{c} \cdot \ln|x|$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{ax} + x \cdot a \cdot e^{ax}$

$= (1+ax) \cdot e^{ax}$

$F(x) = \int x \cdot e^{ax}\, dx = x \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} - \int 1 \, \frac{1}{a} e^{ax}\, dx$

$= \frac{1}{a} x \cdot e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax}$

c) $f'(x) = n \cdot \sin^{n-1}(x) \cdot \cos^2 x - \sin^{n+1}(x)$

$F(x) = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}(x)$

Aufgabe 11 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (1.5 Punkte) oder Enthaltung (0.75 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	ist Basis	ist keine Basis	Enthaltung
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$		X	
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$	X		
$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$		X	
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$		X	
$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$		X	
$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$		X	
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$	X		
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$		X	

Aufgabe 12

Gesucht: λ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} -2+2\lambda \\ 1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2+2\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(-1)^2} = \sqrt{(-3+2\lambda)^2+(\lambda)^2+(3)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4-8\lambda+4\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2+1 = 9-12\lambda+4\lambda^2+\lambda^2+9$$

$$\Leftrightarrow 6-6\lambda+5\lambda^2 = 18-12\lambda+5\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda = 12$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

Der gesuchte Punkt ist also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13

a) $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

$M \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 550 \end{pmatrix}$

b) $A = M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

c) $B = M^{-1} = \frac{1}{0{,}5} \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det A = 3$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen).

Geben Sie die folgenden Determinantenwerte an:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 0 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(2 \cdot A) = 2^4 \cdot 3 = 48$$

$$\det(A \cdot A^T) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$$