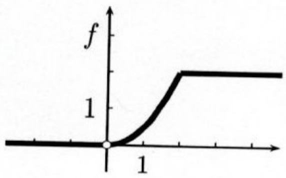
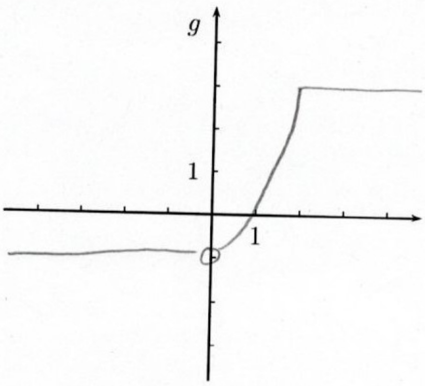
Aufgabe 1 ($3 \times 2 = 6$ Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Funktionsgraf:



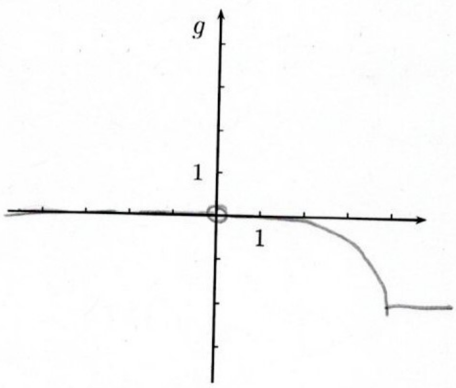
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



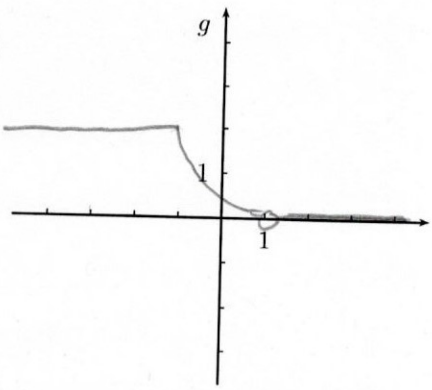
$g(x) = 2 \cdot f(x) - 1$

b)



$g(x) = -f(\frac{1}{2} \cdot x)$

c)



$g(x) = f(-x + 1)$

Aufgabe 2

$p(x) = -2 \cdot (x^3 - x^2 - 21x + 45)$

Nachrechnen ergibt: 3 ist Nullstelle

$(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x-3) = x^2 + 2x - 15$

$-(x^3 - 3x^2)$

$2x^2 - 21x$

$-(2x^2 - 6x)$

$-15x + 45$

$-(-15x + 45)$

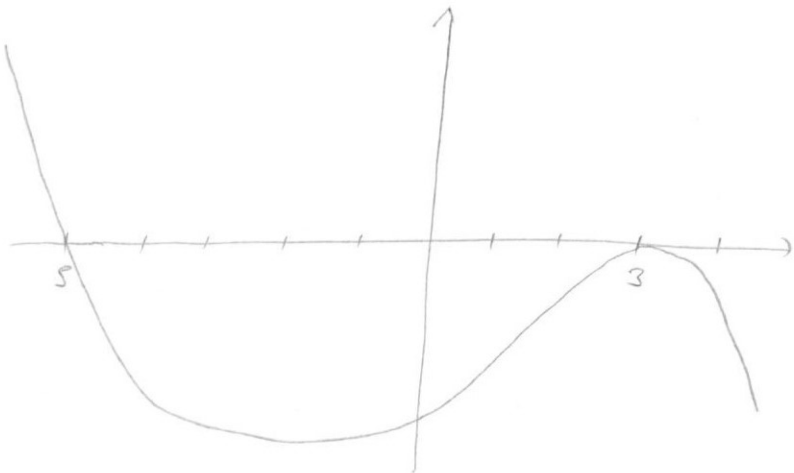
0

$\Rightarrow p(x) = -2 \cdot (x-3) \cdot (x^2 + 2x - 15)$

hat Nst 3 und -5

$= -2 \cdot (x-3) \cdot (x-3)(x+5)$

$= -2 \cdot (x-3)^2 \cdot (x+5)$



Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten *für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

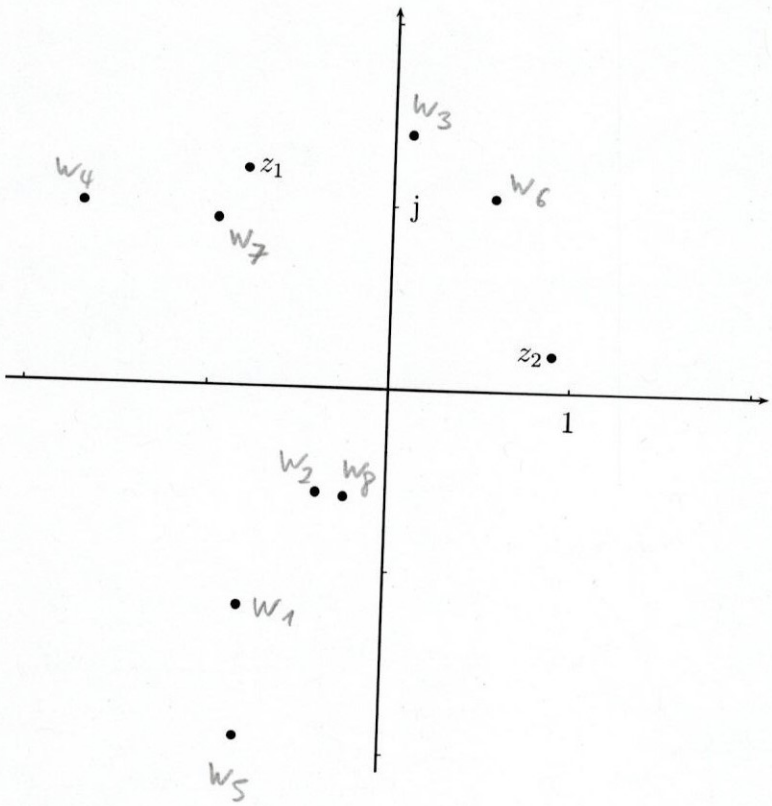
	gilt	gilt nicht	Enth.
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$		X	
$\log_2 a < \log_2 b$	X		
$\log_a 2 < \log_b 2$		X	
$2^a < 2^b$	X		
$0.5^a < 0.5^b$		X	
$\sin a < \sin b$		X	

Aufgabe 4 (8 Punkte)

In der folgenden Skizze sind in der Gaußschen Zahlenebene zu den Punkten $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ die folgenden Punkte markiert:

$$\begin{aligned} w_1 &= {z_1}^*, & w_2 &= \tfrac{1}{z_1} \\ w_3 &= z_1 + z_2 & w_4 &= z_1 - z_2 \\ w_5 &= z_1^2 & &\text{ein } w_6 \text{ mit } w_6^2 = z_1 \\ w_7 &= z_1 \cdot z_2 & w_8 &= \tfrac{z_2}{z_1}. \end{aligned}$$

Welche Punkte stellen welche Zahl dar? Schreiben Sie die richtigen Variablennamen zu den Punkten.



Aufgabe 5

a) $a_2 = \frac{1}{a_1} - 2 = \frac{1}{1} - 2 = -1$

$a_3 = \frac{1}{-1} - 2 = -3$

$a_4 = \frac{1}{-3} - 2 = \frac{-1-6}{3} = -\frac{7}{3}$

$a_5 = -\frac{3}{7} - 2 = \frac{-3-14}{7} = -\frac{17}{7}$

b) Wegen $a_n \to a$ folgt aus

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{a_n} - 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & = & \frac{1}{a} - 2 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = 1 - 2a$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = -1 \pm \sqrt{2}$

Da $a_2 < 0$ ist und damit auch alle weiteren $a_n < 0$ sind kommt nur die negative Lösung in Frage, also

$a = -1 - \sqrt{2}$

Aufgabe 6 (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	konvergiert	konv. nicht	Enth.
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$		×	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$	×		
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2+1)^2}{k^5+1}$		×	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^4}$		×	
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$		×	

Aufgabe 7

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(5 - 2(2+h))^2 - (5-4)^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1-2h)^2 - 1}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - 4h + 4h^2 - 1}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h + 4h^2}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-4 + 4h)$

$= -4$

b) $f'(2) \approx \dfrac{f(2+0{,}1) - f(2)}{0{,}1}$

$= \dfrac{(5 - 2 \cdot 2{,}1)^2 - (5 - 2 \cdot 2)^2}{0{,}1}$

$= \dfrac{(5 - 4{,}2)^2 - 1^2}{0{,}1}$

$= \dfrac{(0{,}8)^2 - 1}{0{,}1}$

$= \dfrac{0{,}64 - 1}{0{,}1}$

$= \dfrac{-0{,}36}{0{,}1}$

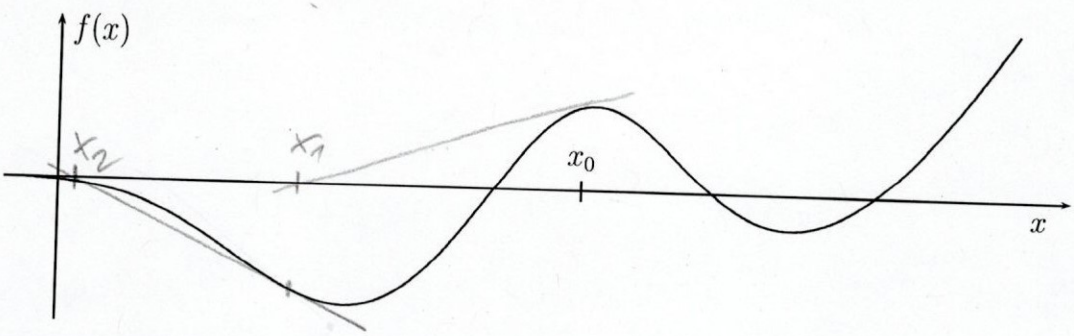
$= -3{,}6$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Betrachtet wird das Newton-Verfahren zur abgebildeten Funktion f bei unterschiedlichen Startwerten x_0.

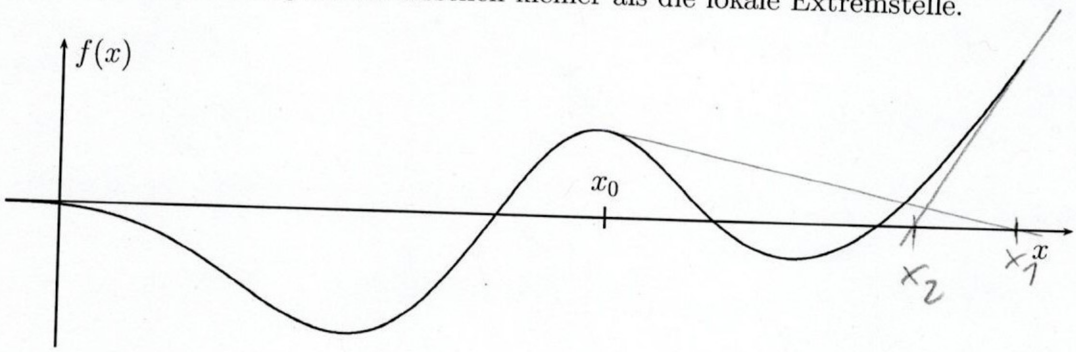
Skizzieren Sie jeweils die Lage der nächsten beiden Iterierten x_1 und x_2

a)



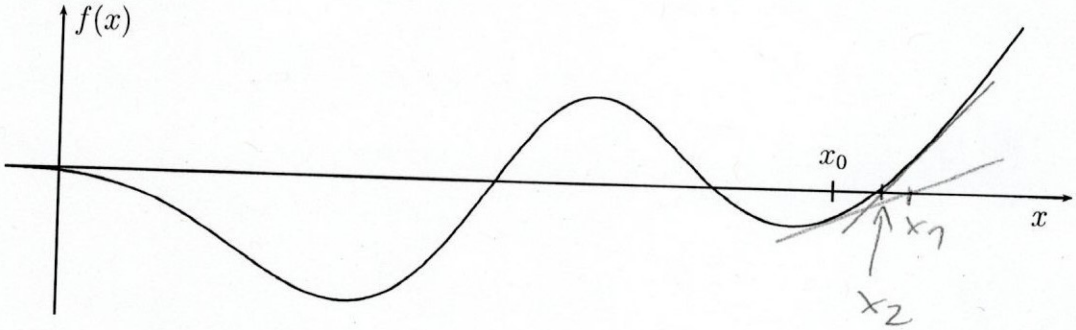
Hinweis: Die Stelle x_0 ist ein bisschen kleiner als die lokale Extremstelle.

b)



Hinweis: Die Stelle x_0 ist ein bisschen größer als die lokale Extremstelle.

c)



Aufgabe 9

a) $\int_0^{\pi/2} \sin(5x)\,dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)\Big|_0^{\pi/2}$

$= -\frac{1}{5}\underbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{5}\underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{1}{5}$

b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x}\,dx = x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{3}\int_0^{\infty} 1\cdot e^{-3x}\,dx$

$= 0 - 0 \quad + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_0^{\infty}$

$= \quad 0 - \left(-\frac{1}{9}\cdot 1\right)$

$= \frac{1}{9}$

c) Partialbruchzerlegung von $\frac{x+7}{x^2-x-2}$:

Nst. von x^2-x-2 sind -1 und 2, also $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

Ansatz: $\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{x^2-x-2}$

$x=2$ in Zähler: $9 = B\cdot 3 \Rightarrow B=3$

$x=-1$ " " : $6 = A\cdot(-3) \Rightarrow A=-2$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1\left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x-2}\right)dx$

$= \left(-2\cdot\ln|x+1| + 3\cdot\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$

$= -2\ln 2 + 3\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} - \left(-2\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} + 3\cdot\ln 2\right)$

$= -5\ln 2$

Aufgabe 10

Der Flächeninhalt $A(c)$ ist

$$A(c) = \| \vec{a} \times \vec{b} \| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} c \\ -1 \\ -2-3c \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{c^2 + (-1)^2 + (-2-3c)^2}$$

Für $c \to \pm\infty$ gilt $A(c) \to \infty$, also gibt es eine Minstelle in $\mathbb{R}$.

Dort gilt

$$0 = A'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c^2+(-1)^2+(-2-3c)^2}} \cdot \left(2c + 2\cdot(-2-3c)\cdot(-3)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2c + 12 + 18c = 12 + 20c$$

$$\Leftrightarrow \quad c = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}$$

Als einziger Kandidat ist das die gesuchte Minstelle.

Aufgabe 11

a) $f(x) = x^2+2$

$= 2+2x \quad -2x-2x^2 \quad +3x^2$

$= 2\cdot v_1(x) \quad -2\cdot v_2(x) \quad +3\cdot v_3(x)$

b) $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin(x)\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \cos(x)\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot \sin(x) \quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$= \frac{1}{2}\cdot v_1(x) \quad + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2(x)$

c) $f(x) = \sinh x$

$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$= \frac{1}{2} v_1(x) - \frac{1}{2} v_2(x)$

c) $f(x) = e^{x+3}$

$= e^x \cdot e^3$

$= e^3\cdot v_1(x) + 0\cdot v_2(x)$

Aufgabe 12 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit den Spalten $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $B = A^T \cdot A$.

Welche Folgerungen gelten allgemein?

Tragen Sie jeweils den Folgerungspfeil in der richtigen Richtung bzw. im Falle der Äquivalenz den Äquivalenzpfeil bzw. im Falle, dass keine Folgerung gilt „$\times$“ ein.

	$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ oder $\times$	
Die a_i sind zueinander orthogonal	$\times$	Die Diagonale von B besteht aus lauter Einsen
Die a_i sind zueinander orthogonal	$\Leftrightarrow$	B ist eine Diagonalmatrix
Die a_i sind zueinander orthogonal	$\Leftarrow$	B ist die Einheitsmatrix
Die a_i haben die Länge 1	$\Leftrightarrow$	Die Diagonale von B besteht aus lauter Einsen
Die a_i haben die Länge 1	$\times$	B ist eine Diagonalmatrix
Die a_i haben die Länge 1	$\Leftarrow$	B ist die Einheitsmatrix

Aufgabe 13

Die Mengen seien x_1 x_2 und x_3 (in Liter)

Dann muss gelten:

$$0{,}1\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + 0{,}5\,x_3 = 200 \quad \text{(Stoff A)}$$
$$0{,}2\,x_1 + 0{,}5\,x_2 + 0{,}4\,x_3 = 400 \quad \text{(Stoff B)}$$
$$0{,}7\,x_1 + 0{,}3\,x_2 + 0{,}1\,x_3 = 400 \quad \text{(Stoff C)}$$

Als erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 200 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 400 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 & 400 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{alles}\cdot 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2000 \\ 2 & 5 & 4 & 4000 \\ 7 & 3 & 1 & 4000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot I \\ -7\cdot I \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2000 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -11 & -34 & -10000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +11\cdot II \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 2000 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & -10000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | : (-100) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 2000 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \begin{array}{l} -5\cdot III \\ +6\,III \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Man muss 300 l von Flüssigkeit 1
600 l " " 2
100 l " " 3 nehmen

Aufgabe 14

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 2a + 0 - 0 - 2 - (-3a)}{-6 + 8 + 0 - 0 - 0 - (-12)}$$

$$= \frac{5a - 2}{14}$$