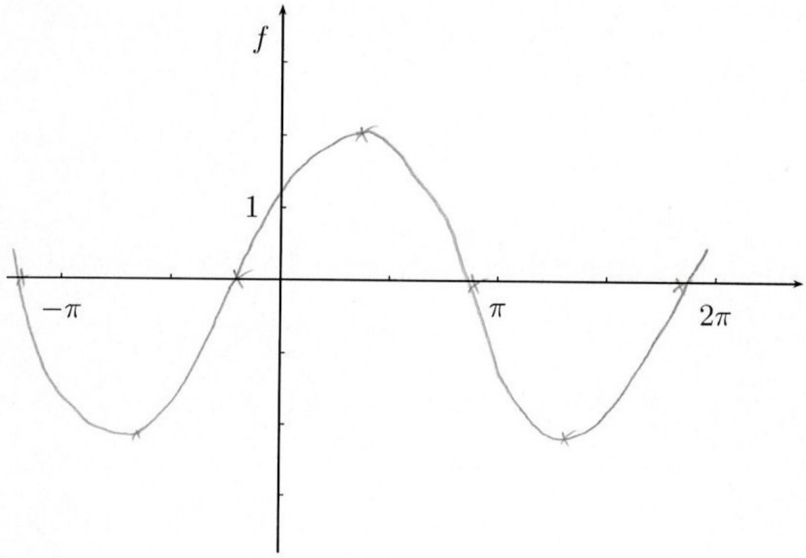
Aufgabe 1 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Sei $f(x) = 2 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

a1) Skizzieren Sie f in dem abgedruckten Koordinatensystem



a2) Für welche c, d gilt die Darstellung

$$f(x) = c \cdot \cos x + d \cdot \sin x?$$

b) Geben Sie ein r und φ an, so dass

$$r \cdot \cos(x - \varphi) = -2 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin x$$

ist.

Hinweis: Es reicht eine Angabe, in der noch ein arcsin, arccos, arctan oder Ähnliches vorkommt.

Tipp: Ggf. hilft eine Vorstellung im Kreis.

a) $f(x) = 2 \cdot \left(\cos(x) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \sin(x) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$

$= 1 \cdot \cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow c = 1,\ d = \sqrt{3}$

b) $r \cdot (\cos(x) \cdot \cos\varphi + \sin(x) \cdot \sin\varphi) \overset{!}{=} -2 \cdot \cos(x) + 3 \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow r \cdot \cos\varphi = -2 \quad \mathrm{I} \qquad \mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2: \ r^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13}$

$r \cdot \sin\varphi = 3 \quad \mathrm{II} \qquad \varphi = \pi - \arctan\frac{3}{2}$

Aufgabe 2 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade, ungerade oder nicht symmetrisch?

Kreuzen Sie den richtigen Eintrag oder „Enthaltung“ an.

Jeder richtige Eintrag zählt 2 Punkte, „Enthaltung“ 1 Punkt. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gerade	ungerade	nicht sym.	Enth.
$f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$			X	
$f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 3}$		X		
$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$	X			
$f(x) = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$			X	
$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$		X		
$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$			X	
$f(x) = \sin x \cdot \cos x$		X		
$f(x) = \sin^4 x \cdot \cos^3 x$	X			

Aufgabe 3 (4 + 8 = 12 Punkte)

a) Markieren Sie die richtige alternative Darstellung (gerundet) der folgenden komplexen Zahlen. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

$-3 + 2\mathrm{j} =$	
$3.74 \cdot \mathrm{e}^{-0.85\mathrm{j}}$	
$3.74 \cdot \mathrm{e}^{1.15\mathrm{j}}$	
$3.74 \cdot \mathrm{e}^{2.55\mathrm{j}}$	X
$5 \cdot \mathrm{e}^{-0.85\mathrm{j}}$	
$5 \cdot \mathrm{e}^{1.15\mathrm{j}}$	
$5 \cdot \mathrm{e}^{2.55\mathrm{j}}$	

$2 \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{j}} =$	
$2 + 3\mathrm{j}$	
$-2\mathrm{j}$	
-8	
$-1.98 + 0.28\mathrm{j}$	X
$1.92 - 0.56\mathrm{j}$	
$0.28 + 1.92\mathrm{j}$	

b) Geben Sie die (komplexen) Nullstellen von

$$p(z) \;=\; z^2 + (4 + 2\mathrm{j})z + (3 + 2\mathrm{j})$$

in der Form $a + b\mathrm{j}$ an.

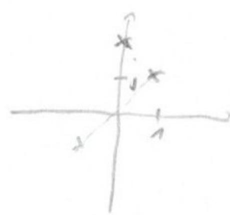
(Tipp: *pq*- oder *abc*-Formel.)

$$z = -\frac{4+2j}{2} \pm \sqrt{(-2-j)^2 - (3+2j)}$$

$$= -2-j \pm \sqrt{4+4j-1-3-2j}$$

$$= -2-j \pm \underbrace{\sqrt{2j}}_{= \pm(1+j)}$$

$$= -2-j \pm (1+j)$$



$$\Rightarrow z_1 = -2-j+1+j = -1$$

$$z_2 = -2-j-1-j = -3-2j$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Geben Sie den Wert (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) der folgenden Grenzwerte an.
(Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(1+2n)^2} = \frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n^2}{1+n} = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^4} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} = 1$

Aufgabe 5

a) $f(x) = \left(1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \ldots\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + - \ldots\right)$

$= \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + - \ldots\right)$

$= 1 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 2x \cdot \frac{1}{2}x^2 + \ldots$

$= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$

b) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos x$

$f'(x) = 2e^{2x} \cdot \cos x - e^{2x} \sin x$

$f''(x) = 4e^{2x} \cos x - 2e^{2x} \sin x - 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x$

$= 3e^{2x} \cos x = 4e^{2x} \sin x$

$f'''(x) = 6e^{2x} \cos x - 3e^{2x} \sin x - 8e^{2x} \sin x - 4e^{2x} \cos x$

$= 2e^{2x} \cos x - 11e^{2x} \sin x$

$T_{3;0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) \cdot x^3$

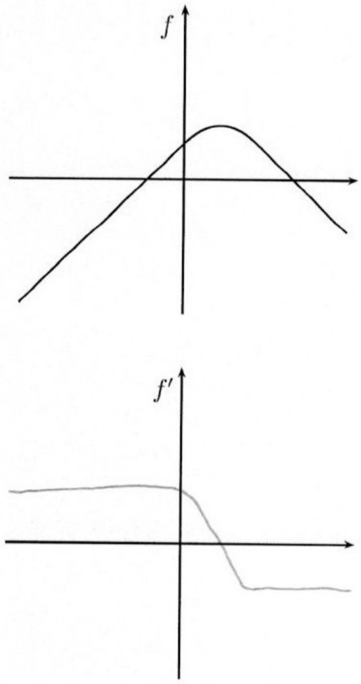
$= 1 + 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot x^3$

$= 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

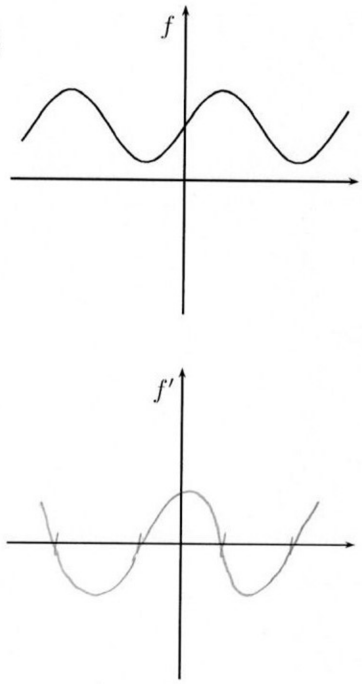
Aufgabe 6 ($4 \times 2 = 8$ Punkte)

Skizzieren Sie in den unteren Koordinatensystemen jeweils die Ableitung zu der oben abgebildeten Funktion.

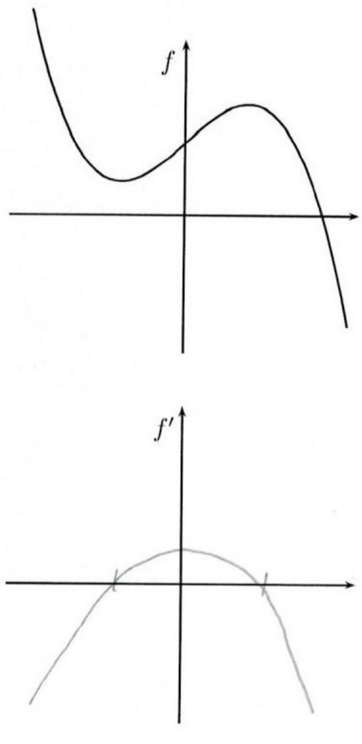
a)



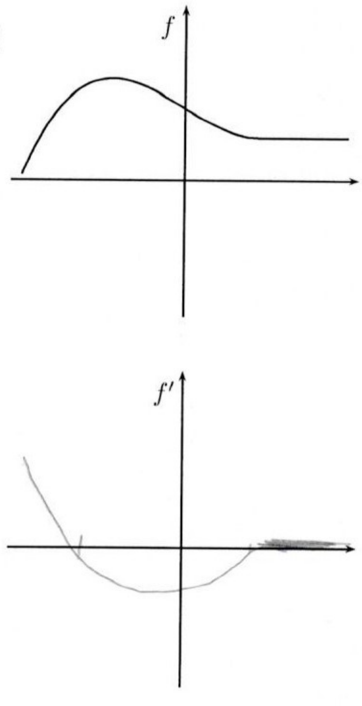
b)



c)



d)



Aufgabe 7

a) $$f'(x) = \frac{1 \cdot (c+3x)^2 - (c+x) \cdot 2 \cdot (c+3x) \cdot 3}{((c+3x)^2)^2}$$

$$= \frac{(c+3x) \cdot (c+3x - 6(c+x))}{(c+3x)^4}$$

$$= \frac{-5c - 3x}{(c+3x)^3}$$

b) $$g(b) = \ln (a \cdot b)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(a \cdot b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$$

$$\Rightarrow g'(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b}$$

Aufgabe 8

a1) $$\int_{-1}^{2} (x^2 + 3x - 1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{8}{3} + 6 - 2 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1\right)$$

$$= 3 + 3 - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

a2) $$\int_{0}^{2} \underline{x} \cdot \underline{(x-1)}^6\, dx = x \cdot \frac{1}{7}(x-1)^7 \Big|_0^2 - \int_0^2 1 \cdot \frac{1}{7}(x-1)^7\, dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{7}(1)^7 - 0 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}(x-1)^8 \Big|_0^2$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{1}{56}\left(1^8 - (-1)^8\right)$$

$$= \frac{2}{7}$$

b) $$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}\, dx \overset{e^x = u}{=} \int_1^e \sqrt{1+u} \cdot \frac{1}{u}\, du$$

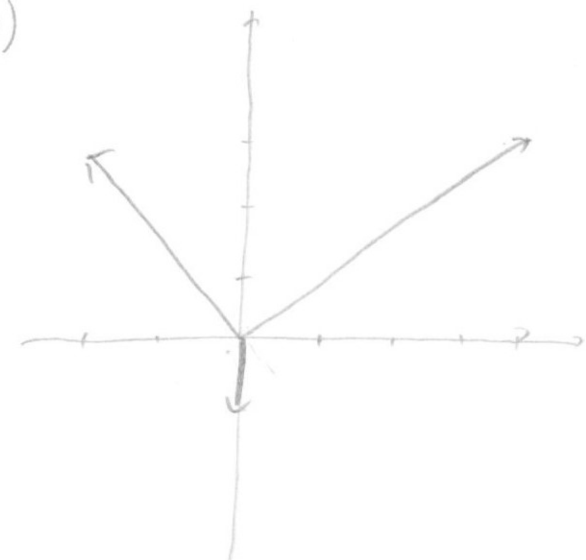
$e^x dx = du$

$dx = \frac{1}{e^x}\, du$

$= \frac{1}{u}\, du$

Aufgabe 9

a)



$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} -2\lambda + 4\mu = 0 \\ 3\lambda + 3\mu = -1 \end{array}$$

Aus I: $\lambda = 2\mu$

in II: $6\mu + 3\mu = -1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{9}$ und $\lambda = -\frac{2}{9}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -\frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Die Kräfte in den Fäden betragen also

links $\left\| -\frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{9} \cdot \left\| \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{13}$

rechts $\left\| -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \left\| \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9} \cdot \sqrt{25} = \frac{5}{9}$

b) rechts: $\frac{5}{9} < \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow$ reicht

links: $\frac{2}{9} \cdot \sqrt{13} > \frac{2}{9} \cdot \sqrt{9} = \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3} \rightarrow$ reicht nicht!

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Für welche Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ stellen

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die gleiche Gerade dar?

$a = -3 \qquad b = -6 \qquad c = 5 \qquad d = -2$

$$\begin{pmatrix} b \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix} \overset{II}{\Rightarrow} \mu = -2, \text{ also } \begin{array}{l} b = -6 \\ d = -2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{III}{\Rightarrow} \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\overset{I}{\Rightarrow} 2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot (-6) = c \Rightarrow c = 2 + 3 = 5$$

$$\overset{II}{\Rightarrow} a + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot (-2) = -2 \Rightarrow a = -2 - 1 = -3$$

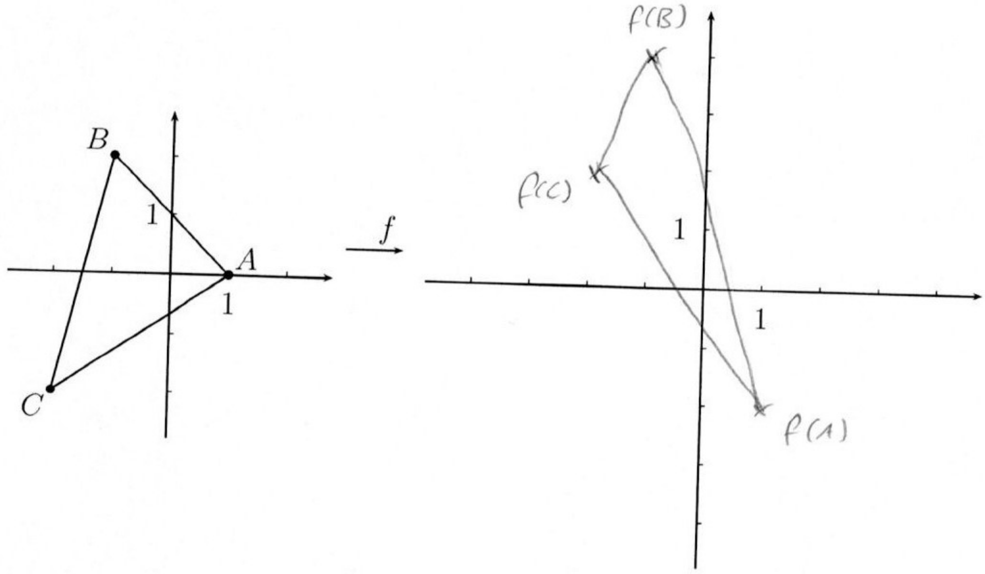
Aufgabe 11 (4 + 3 = 7 Punkte)

a) Betrachtet wird die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$$

die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Ebene einen Punkt $f(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnet.

Wie wird bei dieser Abbildung das dargestellte Dreieck abgebildet? Zeichnen Sie das Bild in das rechte Koordinatensystem.



b) Betrachtet wird neben der Abbildung f aus a) die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Geben Sie eine Matrix M an, so dass die Verkettung $h := g \circ f$ dargestellt werden kann als $h(x) = M \cdot x$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\cdot\mathrm{II} \\ +\ \mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{III} \\ +\ \mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$