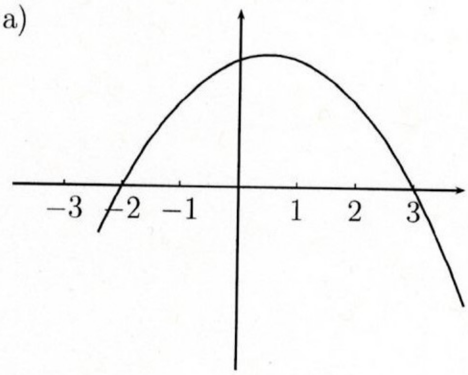
Aufgabe 1 (18 Punkte, davon bis zu 9 Enthaltungspunkte)

Welche Funktion erzeugt den nebenstehenden Funktionsgraf?

(Die Skalierungen der y-Achse sind unterschiedlich.)

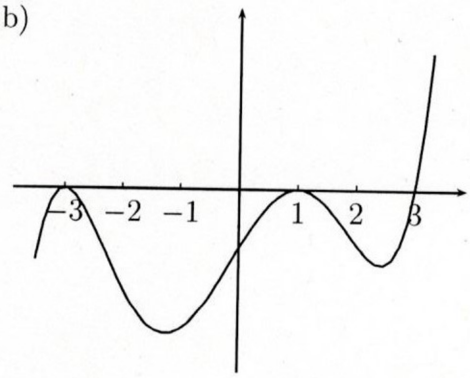
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung" (1,5 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

a)



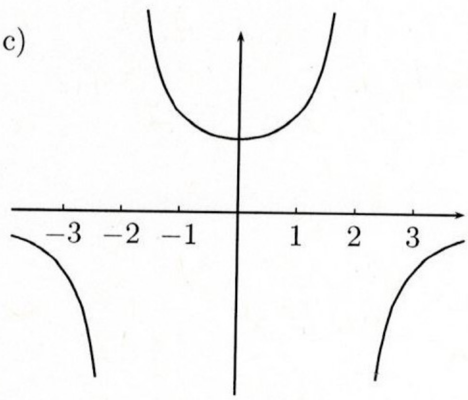
$f(x) = x^2 + x + 6$	
$f(x) = -x^2 + x + 6$	X
$f(x) = x^2 + x - 6$	
$f(x) = -x^2 + x - 6$	
Enthaltung	

b)



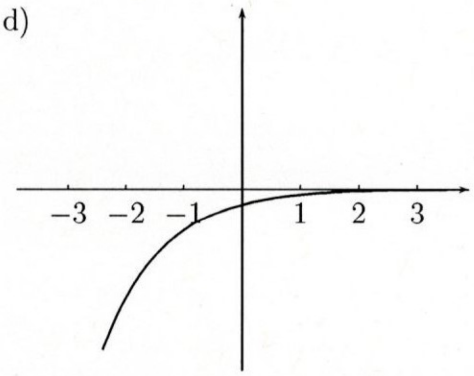
$f(x) = (x+3)^2(x+1)^2(x-3)$	
$f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-3)^2$	
$f(x) = (x+3)^2(x-1)^2(x-3)$	X
$f(x) = (x+3)(x-1)^2(x-3)^2$	
Enthaltung	

c)



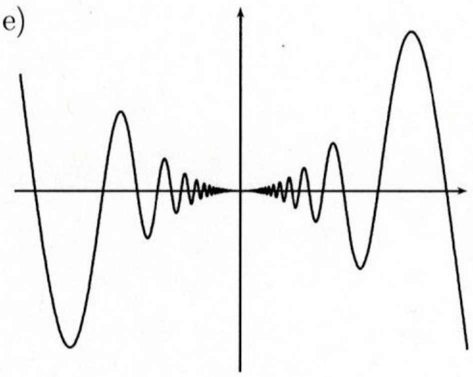
$f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}$	X
$f(x) = -\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$	
$f(x) = -\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}$	
Enthaltung	

d)



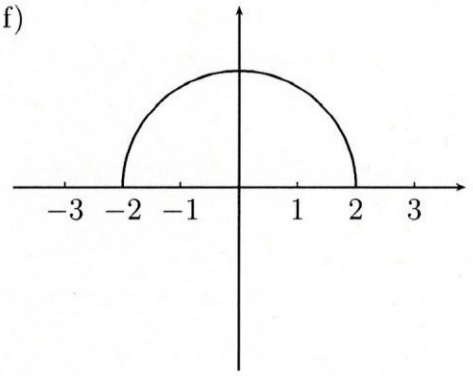
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$	
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	
$f(x) = -\mathrm{e}^{x}$	
$f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$	X
Enthaltung	

e)



$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin x$	
$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x^2$	
$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x^2}$	
$f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$	X
Enthaltung	

f)



$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$	
$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$	
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	X
$f(x) = \sin x + \cos x$	
Enthaltung	

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Geben Sie alle Werte $x \in [0, 2\pi]$ an, für die gilt

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \cos x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -3/2 \text{ oder } \cos x = 1/2$$

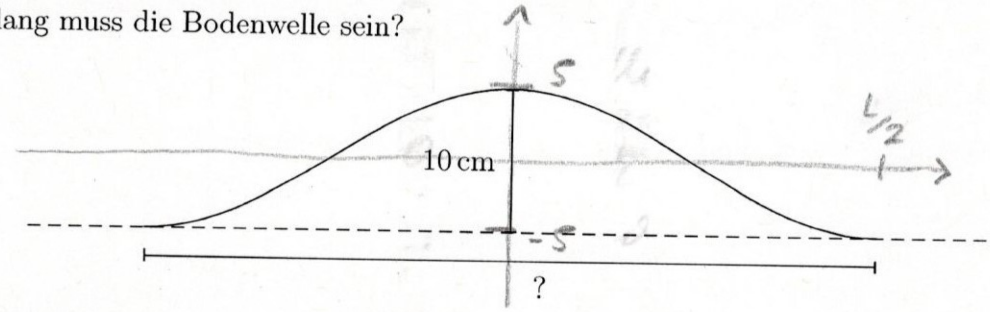
↯

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ oder } x = \frac{5}{3}\pi$$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Zur Verkehrsberuhigung soll eine 10 cm hohe Cosinus-förmige Bodenwelle auf eine Straße gebaut werden. Aus sicherheitstechnischen Gründen darf die maximale Steigung gleich 0.1 sein.

Wie lang muss die Bodenwelle sein?



Bei einer Länge L der Bodenwelle wird bei dem eingezeichneten KO-System mit 1-cm-Einheit die Bodenwelle beschrieben durch

$$f(x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$$

mit $f'(x) = -5 \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x\right)$

Die maximale Steigung ist bei $x = -L/4$, also

$$0{,}1 = -5 \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot \left(-\frac{L}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{10\pi}{L} \cdot \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} = \frac{10\pi}{L}$$

$$\Rightarrow L = \frac{10\pi}{0{,}1} = 100\pi$$

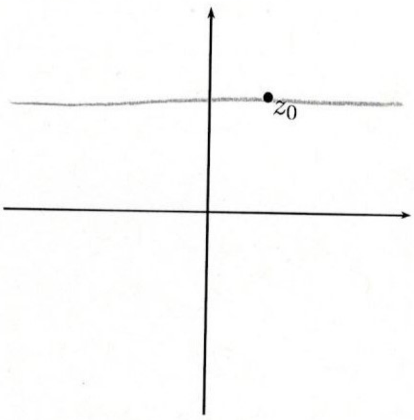
$\Rightarrow$ Die Länge muss 100π cm $= \pi$ m sein.

Aufgabe 4 (6 + 4 = 10 Punkte)

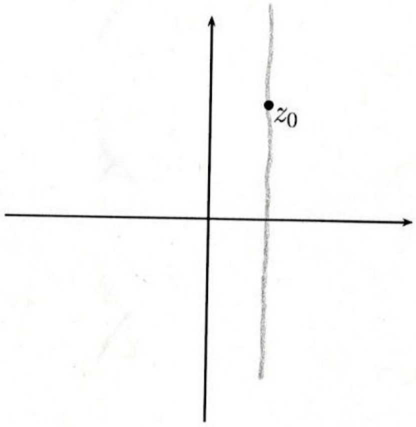
a) Zeichnen Sie zu dem in den Gaußschen Zahlenebenen markierten

$$z_0 = a_0 + b_0\mathrm{j} = r_0 \cdot \mathrm{e}^{\varphi_0 \mathrm{j}} \in \mathbb{C}$$

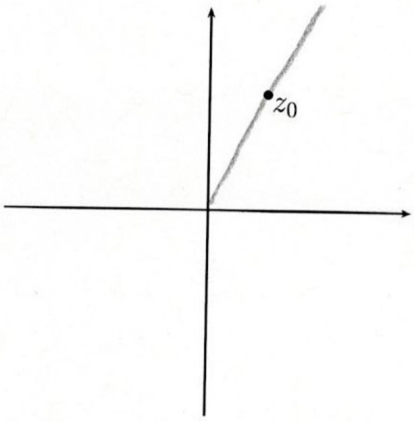
jeweils die angegebene Menge ein.



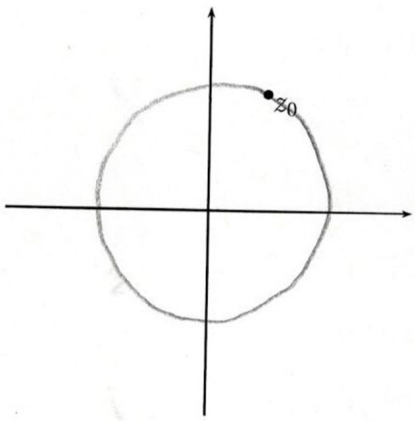
$M_1 = \{a + b_0\mathrm{j} \mid a \in \mathbb{R}\}$



$M_2 = \{a_0 + b\mathrm{j} \mid b \in \mathbb{R}\}$

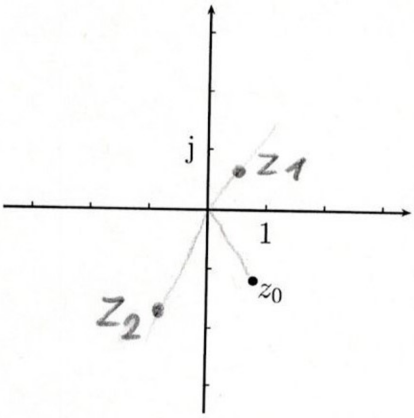


$M_3 = \{r \cdot \mathrm{e}^{\varphi_0 \mathrm{j}} \mid r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$

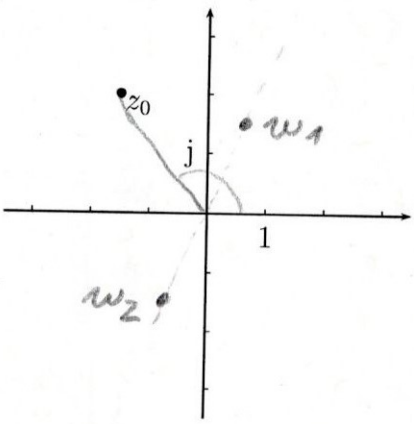


$M_4 = \{r_0 \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{j}} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

b) Zeichnen Sie zu dem in den Gaußschen Zahlenebenen markierten $z_0 \in \mathbb{C}$ jeweils die angegebene Punkte ein.



$z_1 = \frac{1}{z_0}$ und $z_2 = {z_0}^2$



alle w mit $w^2 = z_0$

Aufgabe 5 $(2+3+2+4+3 = 14$ Punkte)

Miniland hat dieses Jahr einen CO_2-Ausstoß von 2000 t. Es will seinen CO_2-Ausstoß jährlich um 20% reduzieren.

a) Geben Sie eine Formel für den CO_2-Ausstoß im n-ten Jahr an. (Dieses Jahr = Jahr 0.)

b) Ab welchem Jahr beträgt der jährliche CO_2-Ausstoß weniger als 100 t? (Ein formelmäßiger Ausdruck, in dem noch ein Logarithmus vorkommt, reicht.)

c) Wie groß ist der gesamte CO_2-Ausstoß (ab diesem Jahr bis in alle Ewigkeit)?

d) Nach wieviel Jahren hat Miniland in Summe mehr als 8000 t CO_2 ausgestoßen? (Ein formelmäßiger Ausdruck, in dem noch ein Logarithmus vorkommt, reicht.)

e) Wie groß muss die jährliche Einsparung mindestens sein, damit der gesamte CO_2-Ausstoß höchstens 8000 t beträgt?

a) $a_0 = 2000\,t\,,\ a_1 = 0{,}8 \cdot 2000\,t\,,\ a_2 = 0{,}8^2 \cdot 2000\,t \ldots$

$\Rightarrow a_n = 0{,}8^n \cdot 2000\,t$

b) $0{,}8^n \cdot 2000t < 100\,t \Leftrightarrow 0{,}8^n < \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow n > \log_{0{,}8} \frac{1}{20}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2000\,t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 0{,}8^n = 2000\,t \cdot \frac{1}{1-0{,}8} = 2000\,t \cdot \frac{1}{0{,}2}$

$= 10000\,t$

d) $8000t < \sum_{n=0}^{N} a_n = 2000\,t \cdot \sum_{n=0}^{N} 0{,}8^n = 2000\,t \cdot \frac{1-0{,}8^{N+1}}{1-0{,}8}$

$= 2000\,t \cdot \frac{1-0{,}8^{N+1}}{0{,}2} = 10000t \cdot (1-0{,}8^{N+1})$

$\Leftrightarrow \frac{8}{10} < 1 - 0{,}8^{N+1} \Leftrightarrow 0{,}8^{N+1} < 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow N+1 > \log_{0{,}8} \frac{1}{5} \Leftrightarrow N > \log_{0{,}8} \frac{1}{5} - 1$

e) Bei jährlicher Einsparung p ist $a_n = (1-p)^n \cdot 2000\,t$, also

$8000\,t = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \cdot 2000\,t = 2000\,t \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 2000\,t \cdot \frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow p = \frac{2000\,t}{8000\,t} = \frac{1}{4}$, also Einsparung von 25%

Aufgabe 6 (5 + 6 = 11 Punkte)

Sei $f_c(x) = x \cdot \ln(c \cdot x)$ mit einem Parameter $c > 0$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}^{>0}$.

a) Wie muss c gewählt werden, damit f_c bei $x = 1$ eine Extremstelle hat?

b) Wie muss c gewählt werden, damit $\int_0^1 f_c(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ist?

Tipp: Nutzen Sie eine geschickte partielle Integration!

a) Es gilt.

$$f_c'(x) = 1 \cdot \ln(cx) + x \cdot \frac{1}{c \cdot x} \cdot c$$
$$= \ln(cx) + 1$$

Bei einer Extremstelle bei 1 gilt

$$0 = f'(1) = \ln(c \cdot 1) + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 = \ln c$$
$$\Leftrightarrow \quad c = e^{-1}$$

b) $$1 = \int_0^1 x \cdot \ln(cx)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(cx)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{cx} \cdot c\,dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \ln c - 0 - \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln c - \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\ln c - \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\ln c$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} = \ln c$$
$$\Leftrightarrow \quad c = e^{5/2}$$

Aufgabe 7 (7 + 5 = 12 Punkte)

a) Zeigen Sie mittels der Taylor-Entwicklung, dass die Potenzreihenentwicklung zur Funktion $f(x) = \arcsin x$ beginnt mit

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \text{ Terme mit } x^4 \text{ und höher.}$$

(Hinweis: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)

b) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\arcsin(2x) - x}{x^3}.$$

a) PR-Entw. = Taylorentw. in 0, also

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\cdot x^3 + \dots$$

Es ist $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f(0) = \arcsin 0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$= (1-x^2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)$$

$$= x\cdot(1-x^2)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 1\cdot(1-x^2)^{-3/2} + x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1-x^2)^{-5/2}(-2x)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = 1$$

$$\Rightarrow \arcsin x \approx 0 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot x^3 + \dots$$

$$= x + \frac{1}{6}\cdot x^3 + \dots$$

b)
$$\frac{\frac{1}{2}\arcsin(2x) - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + \dots\right) - x}{x^3}$$

$$= \frac{\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \dots\right) - x}{x^3} = \frac{2}{3} + \dots$$

$$\xrightarrow{x \to 0} \frac{2}{3}$$

Aufgabe 8 ($3 + 3 = 6$ Punkte)

Das Integral $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ zur abgebildeten Funktion f (mit einer Maximalstelle bei 1.5 und einer Minimalstelle bei 5) soll durch eine Riemannsche Zwischensumme S zur Zerlegung

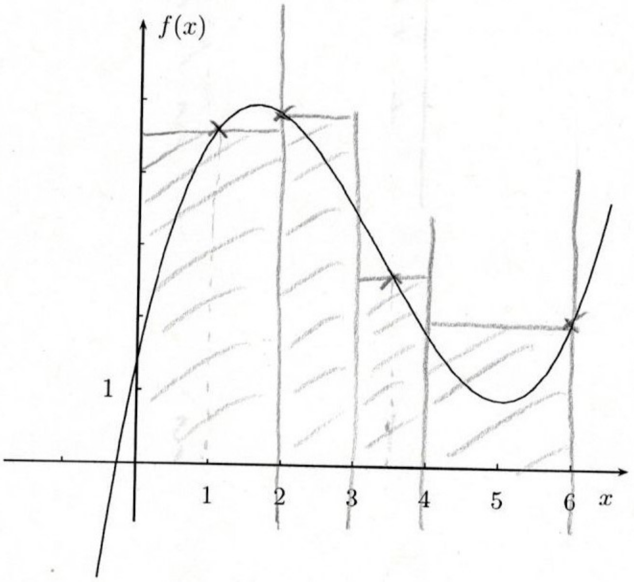
$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 6$$

angenähert werden.

a) Skizzieren Sie in dem Bild, wie sich die Riemannsche Zwischensumme S ergibt, wenn man als Zwischenstellen

$$\widehat{x_1} = 1, \quad \widehat{x_2} = 2, \quad \widehat{x_3} = 3.5, \quad \widehat{x_4} = 6$$

wählt. (Sie brauchen nur zu zeichnen, nicht zu rechnen.)

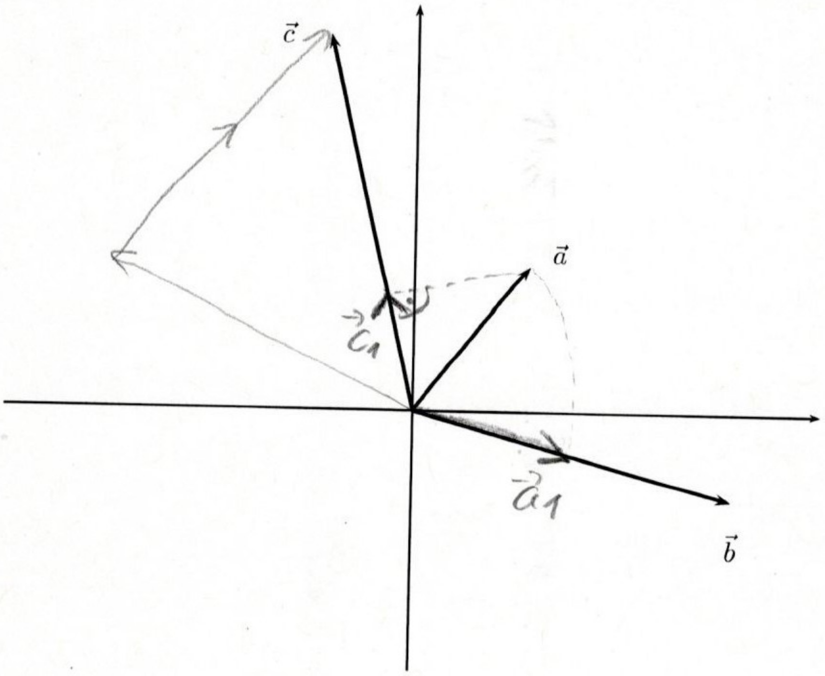


b) Welche Zwischenstellen $\widehat{x_1}$, $\widehat{x_2}$, $\widehat{x_3}$ und $\widehat{x_4}$ muss man wählen, damit die Riemannsche Zwischensumme S (bei gleicher Zerlegung) der Untersumme entspricht?

$\widehat{x_1} = 0 \qquad \widehat{x_2} = 3 \qquad \widehat{x_3} = 4 \qquad \widehat{x_4} = 5$

Aufgabe 9 $(3 + 2 + 2 + 2 = 9$ Punkte)

Betrachtet werden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ entsprechend der Skizze.



a) Wie lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

Zeichnen Sie die Situation in die Skizze und geben Sie die Linearkombination an.

Hinweis: Die Koeffizienten der Linearkombination sind ganzzahlig!

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

b) Es sei $\vec{d} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Wie lässt sich $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

Geben Sie die Linearkombination an.

$\vec{d} = \vec{a} + \frac{1}{2}(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

c) Gesucht ist ein Vektor $\vec{a}_1$, der die gleiche Länge wie $\vec{a}$ besitzt, so dass das Skalarprodukt von $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}$ maximal groß wird.

Zeichnen Sie $\vec{a}_1$ in die Skizze oben ein!

d) Gesucht ist ein skalares Vielfaches $\vec{c}_1 = \lambda \cdot \vec{c}$ von $\vec{c}$, so dass das Skalarprodukt von $\vec{a} \cdot \vec{c}$ gleich dem Produkt der Längen von $\vec{c}$ und $\vec{c}_1$ ist.

Zeichnen Sie $\vec{c}_1$ in die Skizze oben ein!

Aufgabe 10 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

und

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Gesucht: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot \mathrm{I} \\ :2 \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \cdot(-1) \end{array}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Lsgen sind $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Schnittgerade erhält man also über E_2 mit $\beta = \gamma$, $\alpha = -4 - 4\gamma$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-4-4\gamma) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Schnittgerade ist $g = \{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} | \gamma \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 11 $(5+3=8$ Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

(Tipp: Determinante!)

b) Geben Sie eine Matrix X an, so dass gilt

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) A ist invbar $\Leftrightarrow$

$$0 \neq \det A = 0 + (-a) + 0 - 4 - 0 - (-3a)$$
$$= 2a - 4$$

$\Leftrightarrow a \neq 2$

b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$