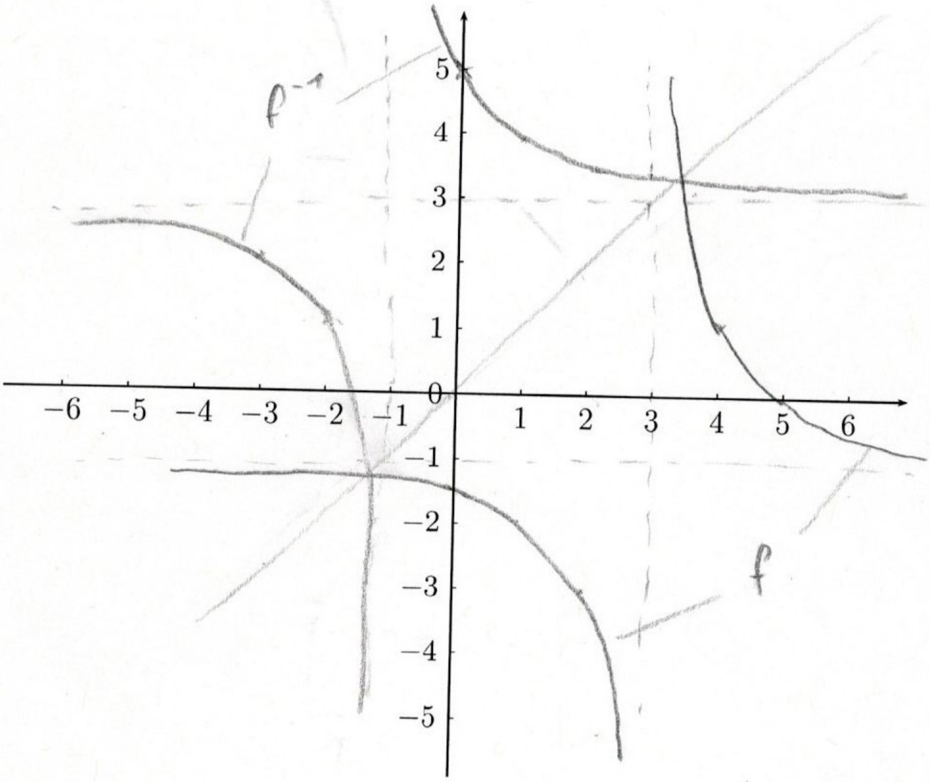
Aufgabe 1 (3 + 3 = 6 Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - 1$.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

b) Skizzieren Sie den Funktionsgrafen zu f sowie den zur Umkehrfunktion f^{-1} in dem folgenden Koordinatensystem.



a) $y = \dfrac{2}{x-3} - 1$

$\Leftrightarrow y + 1 = \dfrac{2}{x-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{x-3}{2}$

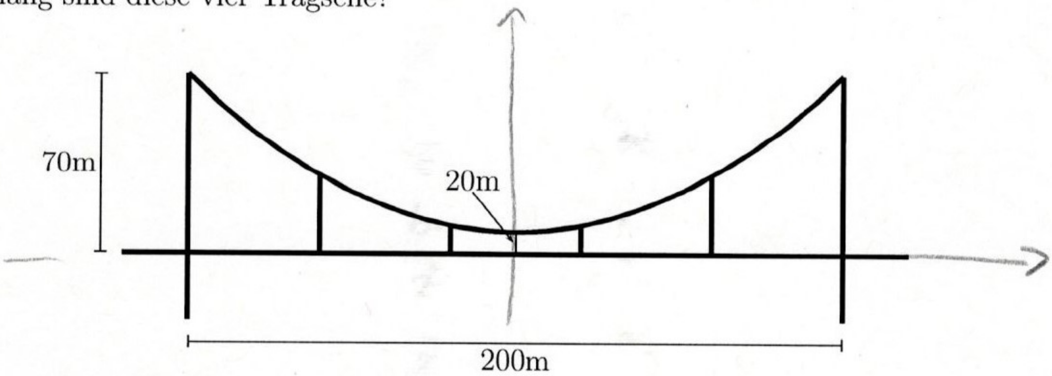
$\Leftrightarrow x = 3 + \dfrac{2}{y+1}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 + \dfrac{2}{x+1}$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine 200m lange Hängebrücke besitzt ein parabelförmiges Hauptseil, das an den 70m hohen Pfeilern (von der Straße aus gemessen) aufgehängt ist und am tiefsten Punkt 20m über der Fahrbahn verläuft. Dazwischen sind in gleichen Abständen vier Tragseile für die Fahrbahn montiert (s. Skizze (nicht maßstabsgetreu)).

Wie lang sind diese vier Tragseile?



Bzgl. des eingezeichneten KO-Systems mit 10m-Einheit wird das Hauptseil beschrieben durch

$$f(x) = 2 + ax^2$$

mit $f(10) = 7$, also

$$7 = 2 + a \cdot 100 \iff a \cdot 100 = 5 \iff a = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Die Tragseile sind an den Stellen ± 2 und ± 6 mit

$$f(\pm 2) = 2 + \frac{1}{20}(\pm 2)^2 = 2 + \frac{2}{10} = 2{,}2$$

$$f(\pm 6) = 2 + \frac{1}{20}(\pm 6)^2 = 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot 6 = 3{,}8$$

Wegen der 10m-Einheit folgt:

Die Tragseile sind 22m bzw. 38m lang.

Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Markieren Sie den richtigen (gerundeten) Zahlenwert.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

$\cos 2 =$	
0.973	
0.416	
−0.416	X
−0.973	
Enthalt.	

$\arccos(-0.2) =$	
1.77	X
0.635	
−0.635	
−1.77	
Enthalt.	

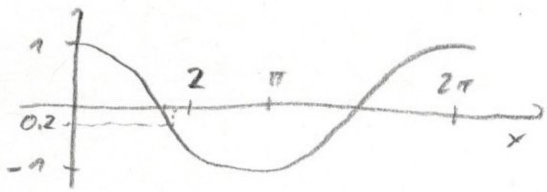
$\sqrt{0.2} =$	
4	
0.45	X
0.045	
0.04	
Enthalt.	

$2^{-1.5} =$	
2.83	
0.354	X
−0.354	
−2.83	
Enthalt.	

$\mathrm{ld}\, 5 =$	
2.32	X
1.46	
−1.46	
−2.32	
Enthalt.	

$\ln 0.3 =$	
2.43	
1.20	
−1.20	X
−2.43	
Enthalt.	

cos x



Aufgabe 4 (12 Punkte)

Geben Sie zu den angegebenen komplexen Zahlen z die entsprechenden Werte an (bei d), e) und f) egal ob in kartesischer oder Polar-Darstellung).

		$z = 3 - 4\mathrm{j}$	$z = 3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$
a)	$\|z\|$	$\sqrt{3^2+4^2} = 5$	3
b)	$\mathrm{Re}\, z$	3	$3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$
c)	$\mathrm{Im}\, z$	-4	$3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$
d)	z^*	$3 + 4j$	$3 \cdot e^{-\frac{\pi}{3} j}$
e)	z^2	$-7 - 24j$	$9 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi j}$
f)	$\frac{1}{z}$	$\frac{3}{25} + \frac{4}{25} j$	$\frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{\pi}{3} j}$

$$(3-4j)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4j + (4j)^2$$
$$= 9 - 24j - 16 \quad = -7 - 24j$$

$$\frac{1}{3-4j} = \frac{3+4j}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25} j$$

Aufgabe 5 $(3+2+3=8$ Punkte)

a) Geben Sie

a1) eine rekursive Definition einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a2) eine direkte Definition von a_n in Abhängigkeit von n an,

so dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Folgengliedern beginnt:

$$a_1=-4, \quad a_2=-1, \quad a_3=2, \quad a_4=5, \quad a_5=8.$$

a1) $a_1 = -4$; $a_{n+1} = a_n + 3$

a2) $a_n = -7 + 3 \cdot n$

b) Geben Sie eine direkte Definition von b_n in Abhängigkeit von n an, so dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Folgengliedern beginnt:

$$b_1=1, \quad b_2=-\frac{1}{3}, \quad b_3=\frac{1}{5}, \quad b_4=-\frac{1}{7}, \quad b_5=\frac{1}{9}.$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

c) Geben Sie c_k an, so dass für die Partialsummen s_n zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ gilt

$$s_1=2, \quad s_2=6, \quad s_3=12, \quad s_4=20, \quad s_5=30.$$

Es ist $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 6$, $c_4 = 8$, $c_5 = 10$

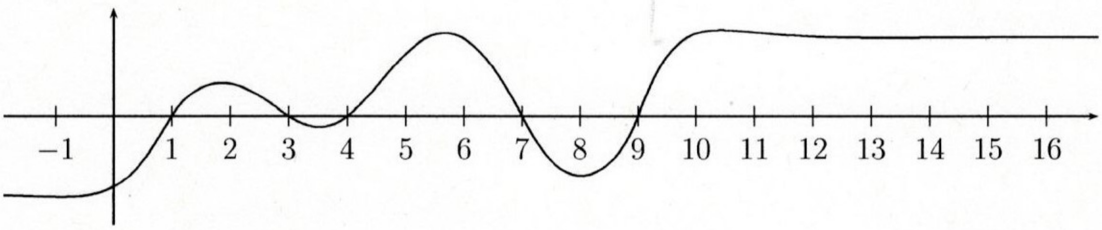
$\Rightarrow c_k = 2k$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Betrachtet wird die unten skizzierte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Nullstellen bei 1, 3, 4, 7 und 9.

Für welche $b \in [0, 16]$ konvergiert das Bisektionsverfahren mit den Startwerten $a = 0$ und b gegen die Nullstelle 1?

Geben Sie sämtliche Bereiche innerhalb von $[0, 16]$ an, in denen b dazu liegen kann.



$[1;3[\,,\ ]4;6[\,,\ ]9;12[$

Aufgabe 7 (4 + 4 = 8 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot \ln x}{\cos(\pi\cdot x)+1}$ $\to 0$, $\to 0$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1\cdot \ln x + (x-1)\cdot \frac{1}{x}}{-\pi \sin(\pi x)} \quad \to 0, \to 0$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} + 1\cdot\frac{1}{x} + (x-1)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\pi^2\cdot \underbrace{\cos(\pi x)}_{\to -1}}$$

$$= \frac{1+1+0}{-\pi^2\cdot(-1)} = \frac{2}{\pi^2}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \quad \to 0, \to 0 \quad \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\, e^{\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\cdot e^{\frac{2}{x}}$$

$$= 2\cdot e^0 = 2$$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Eine Firma will den optimalen Preis für ein Produkt bestimmen. Die Herstellungskosten liegen pro Stück bei h. Je teurer das Produkt angeboten wird, desto weniger wird davon verkauft; Marktanalysen haben ergeben, dass bei einem Verkaufspreis p die Anzahl der verkauften Produkte mit $\frac{c}{p^2}$ pro Jahr (mit einer Konstanten c) prognostiziert werden kann.

Zu welchem Preis p soll die Firma das Produkt anbieten, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(Das Ergebnis kann noch von h oder c abhängen.)

Gewinn $g(p) = \underbrace{\frac{c}{p^2}}_{\text{Anzahl}} \cdot \underbrace{(p-h)}_{\text{Gewinn pro Stück}} = \frac{c}{p} - \frac{c \cdot h}{p^2}$

Für $p<h$ ist $g(p)<0$, für $p>h$ ist $g(p)>0$, für $p \to \infty$ gilt $g(p) \to 0$. Also gibt es eine Maximalstelle in $[h; \infty[$; dort gilt

$$0 = g'(p) = -\frac{c}{p^2} - (-2) \cdot \frac{c \cdot h}{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{p^2} = \frac{2ch}{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = 2h$$

Als einzige Nst. von g' ist also $p = 2h$ die gesuchte Max. stelle.

Aufgabe 9 (3 + 4 + 4 = 11 Punkte)

Bestimmen Sie

a) $\int \frac{1}{(7x+1)^4}\,\mathrm{d}x,$ $= \int (7x+1)^{-4}\,dx$

$= \frac{-1}{21}(7x+1)^{-3} = -\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{(7x+1)^3}$

b) $\int x\cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x,$ $= x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int 1\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$

$= \frac{1}{3}x\cdot e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$

c) $\int x\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$ $= \int x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

Aufgabe 10 $(2 + 6 + 3 = 11$ Punkte)

Sei V der Vektorraum aller linearen Funktionen $f(x) = mx + b$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Im Folgenden werden $f, g \in V$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = 3x + 1$ betrachtet.

a) Stellen Sie $h(x) = x + 2$ als Linearkombination von f und g dar.

b) Berechnen Sie das Skalarprodukt von f und g sowie die Länge (bzgl. des Skalarprodukts) von g.

c) Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $h(x) = x + c$ zu f orthogonal (bzgl. des Skalarprodukts) ist?

a) $h = \lambda_1 f + \lambda_2 g \Rightarrow x + 2 = \lambda_1 x + \lambda_2 (3x+1)$

$= (\lambda_1 + 3\lambda_2)x + \lambda_2$

$\Rightarrow 1 = \lambda_1 + 3\lambda_2$ und $2 = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1 = -5$ und $\lambda_2 = 2$

$\Rightarrow h = -5f + 2g$

b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot (3x+1)\,dx = \int_0^1 (3x^2 + x)\,dx$

$= \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$

$\|g\| = \sqrt{\langle g ; g \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (3x+1)^2\,dx} = \sqrt{\frac{1}{9}(3x+1)^3\Big|_0^1}$

$= \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{63}{9}} = \sqrt{7}$

c) $0 = \langle h, f \rangle = \int_0^1 (x+c) \cdot x\,dx = \int_0^1 (x^2 + cx)\,dx$

$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}cx^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}c - 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}c$

$\Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}$

Aufgabe 11 (9 Punkte)

Ein Flugzeug befindet sich bezüglich eines vorgegebenen Koordinatensystems mit „1 km"-Einheit aktuell am Punkt $(-4, 12, 8)$ und fliegt geradlinig mit Geschwindigkeit $450\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zum Punkt $(10, 7, 10)$.

An welchem Punkt befindet sich das Flugzeug nach einer Minute?

Hinweis: Als Taschenrechner-Ersatz hier eine Tabelle von Quadratzahlen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

Das Flugzeug bewegt sich auf der Gerade, die durch

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ beschrieben wird

Nach einer Minute $= \frac{1}{60}$ Stunde ist es $\frac{1}{60} \cdot 450 = \frac{15}{2}$ km weit geflogen. Gesucht ist also $\lambda > 0$ mit

$$\frac{15}{2} = \left\| \lambda \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \cdot \sqrt{14^2 + (-5)^2 + 2^2}$$
$$= |\lambda| \cdot \sqrt{196 + 25 + 4}$$
$$= |\lambda| \cdot \sqrt{225}$$
$$= |\lambda| \cdot 15$$

Den gesuchten Punkt erhält man also bei $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Geben Sie sämtliche Lösungen an zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot I \\ +I \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-3) \\ +\frac{2}{3}\cdot II \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\underline{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot \underline{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Die Lsgen sind $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

Aufgabe 13 $(4 + 2 = 6$ Punkte)

a) Füllen Sie die leeren Felder unten so aus, dass links und rechts die gleiche quadratische Form zu $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ steht.

$$x^T \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{3} & 7 \\ 1 & \boxed{3} & 2 \\ -1 & \boxed{-2} & 4 \end{pmatrix} x \;=\; \begin{array}{c} -{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + \boxed{4}\,{x_3}^2 \\ +4x_1x_2 + \boxed{6}\,x_1x_3 \end{array}$$

b) Geben Sie eine *symmetrische* Matrix B an, die die gleiche quadratische Form erzeugt, wie die in Aufgabenteil a) angegebene.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$