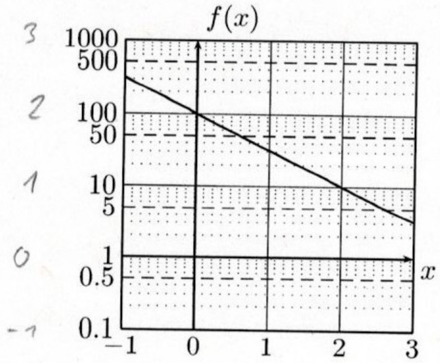
Aufgabe 1 (6 Punkte)

Welche Funktionen sind in den beiden folgenden Schaubildern (mit zum Teil logarithmischer Skalierung) durch die Geraden dargestellt?

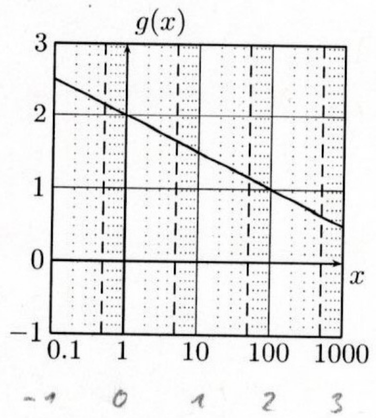


$f(x) = \dfrac{100}{(\sqrt{10})^x}$

Mit $y = \log_{10} f(x)$ ist

$\log_{10} f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow \quad f(x) = 10^{2-\frac{1}{2}x} = 10^2 \cdot 10^{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{100}{(\sqrt{10})^x}$



$g(x) = 2 - \frac{1}{2}\log_{10} x$

Bei linearer Skalierung wie angedeutet wird die Gerade jeweils beschrieben durch $y = 2 - \frac{1}{2}x$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei

$$f(x) \; = \; x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) \; = \; \sin(5x).$$

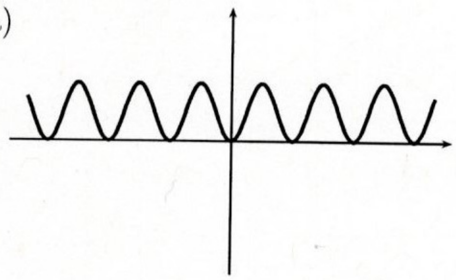
Welche der unten dargestellten Funktionsgraphen gehört zu den angegebenen Funktionen? (Die Skalierungen der Achsen sind unterschiedlich.)

Schreiben Sie den entsprechenden Buchstaben in die Tabelle.

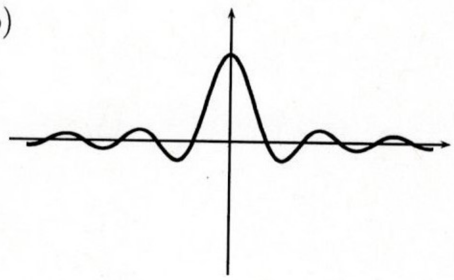
(Zu jeder Funktion gibt es genau ein Bild; zwei Bilder „bleiben übrig“.)

Funktion	Bild	Funktion	Bild
$h(x) \; = \; f \circ g(x)$	a)	$h(x) \; = \; f(x) \cdot g(x)$	c)
$h(x) \; = \; g \circ f(x)$	f)	$h(x) \; = \; f(x) + g(x)$	d)

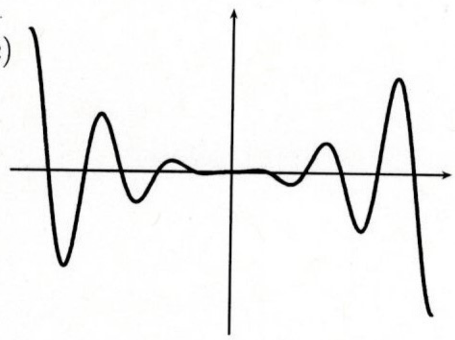
a)



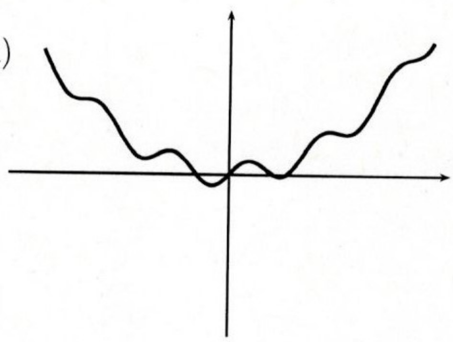
b)



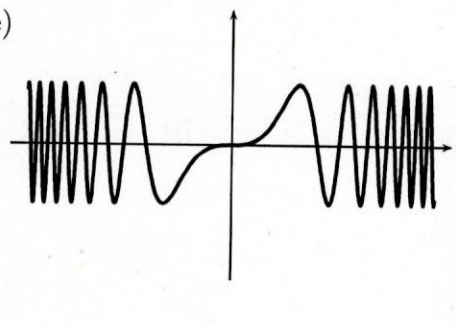
c)



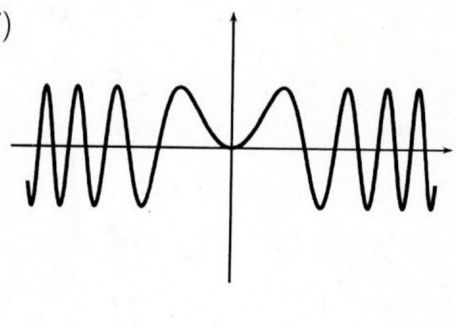
d)



e)



f)

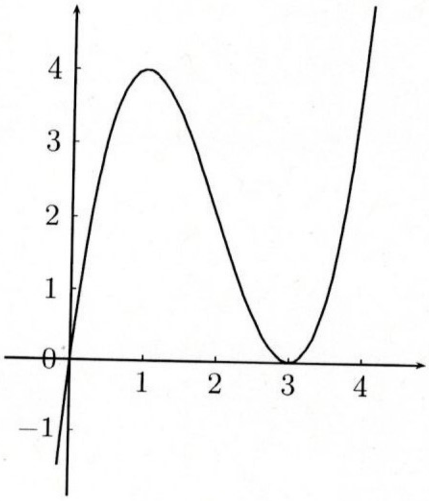


Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Die Funktion

$$p(x) \;=\; x^3 - 6x^2 + 9x$$

hat den rechts dargestellten Funktionsgrafen mit Maximum bei $(1|4)$ und Minimum bei $(3|0)$.



Geben Sie jeweils an, ob diese Funktion mit den jeweils angegebenen Definitions- und Zielbereichen injektiv bzw. surjektiv ist.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (1 Punkt) oder „Enthaltung“ (0.5 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	injektiv			surjektiv		
	ja	nein	Enth.	ja	nein	Enth.
$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$		X		X		
$p : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$		X		X		
$p : \mathbb{R}^{<0} \to \mathbb{R}^{<0}$	X			X		
$p : [0; 4] \to [0; 4]$		X		X		
$p : [0; 1] \to [0; 4]$	X			X		
$p : [3; 4] \to \mathbb{R}^{\geq 0}$	X				X	

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Geben Sie ein quadratisches Polynom $p(z)$ an, das Nullstellen in $z = 1 - 2\mathrm{j}$ und $z = 1 - 3\mathrm{j}$ besitzt, und für das $p(2 - \mathrm{j}) = 4 + \mathrm{j}$ gilt.

Hinweis: Eine Produkt-Darstellung für p reicht.

Ansatz: $p(z) = a \cdot (z - (1-2j)) \cdot (z - (1-3j))$ mit $a \in \mathbb{C}$

$$4+j = p(2-j) = a\,(2-j-1+2j)\cdot(2-j-1+3j)$$
$$= a\,(1+j)(1+2j)$$
$$= a\,(1+2j+j-2)$$
$$= a\,(-1+3j)$$

$$\Rightarrow a = \frac{4+j}{-1+3j} = \frac{(4+j)(-1-3j)}{1^2+3^2}$$
$$= \frac{1}{10}(-4-12j-j+3)$$
$$= \frac{1}{10}(-1-13j)$$
$$= -0{,}1-1{,}3\,j$$

$$\Rightarrow p(z) = (-0{,}1-1{,}3j)\cdot(z-(1-2j))\cdot(z-(1-3j))$$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Geben Sie die folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) an.

(Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{n^2+1} = 4$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{n^2-1} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x^2}{x+1} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2}{x+1} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 \cdot 3^x = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4^x + x^3}{3^x + x^4} = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x^2} = \infty$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x+1} = 1$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x + \sin x}{x + \sin^2 x} = 3$

Aufgabe 6 (4 + 6 = 10 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten a_k, $k = 0, \dots, 6$, zur Potenzreihenentwicklung von f (also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$) zu

a) $f(x) = e^{2x^2}$,

b) $f(x) = \sin^2 x$.

Tragen Sie die Koeffizienten soweit wie möglich gekürzt in die folgende Tabelle ein.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a)	1	0	2	0	2	0	$4/3$
b)	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$2/45$

$$e^{2x^2} = 1 + (2x^2) + \frac{1}{2}\cdot(2x^2)^2 + \frac{1}{3!}(2x^2)^3 + \dots$$

$$= 1 + 2x^2 + 2x^4 + \frac{1}{3}\cdot 4\cdot x^6 + \dots$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \dots\right)\cdot\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \dots\right)$$

$$= x^2 + 2\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{3!}x^3\right) + x^6\left(1\cdot\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\cdot 1\right) + \dots$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \underbrace{\left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3!}\right)}\cdot x^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} = \frac{3+5}{3^2\cdot 4\cdot 5}$$

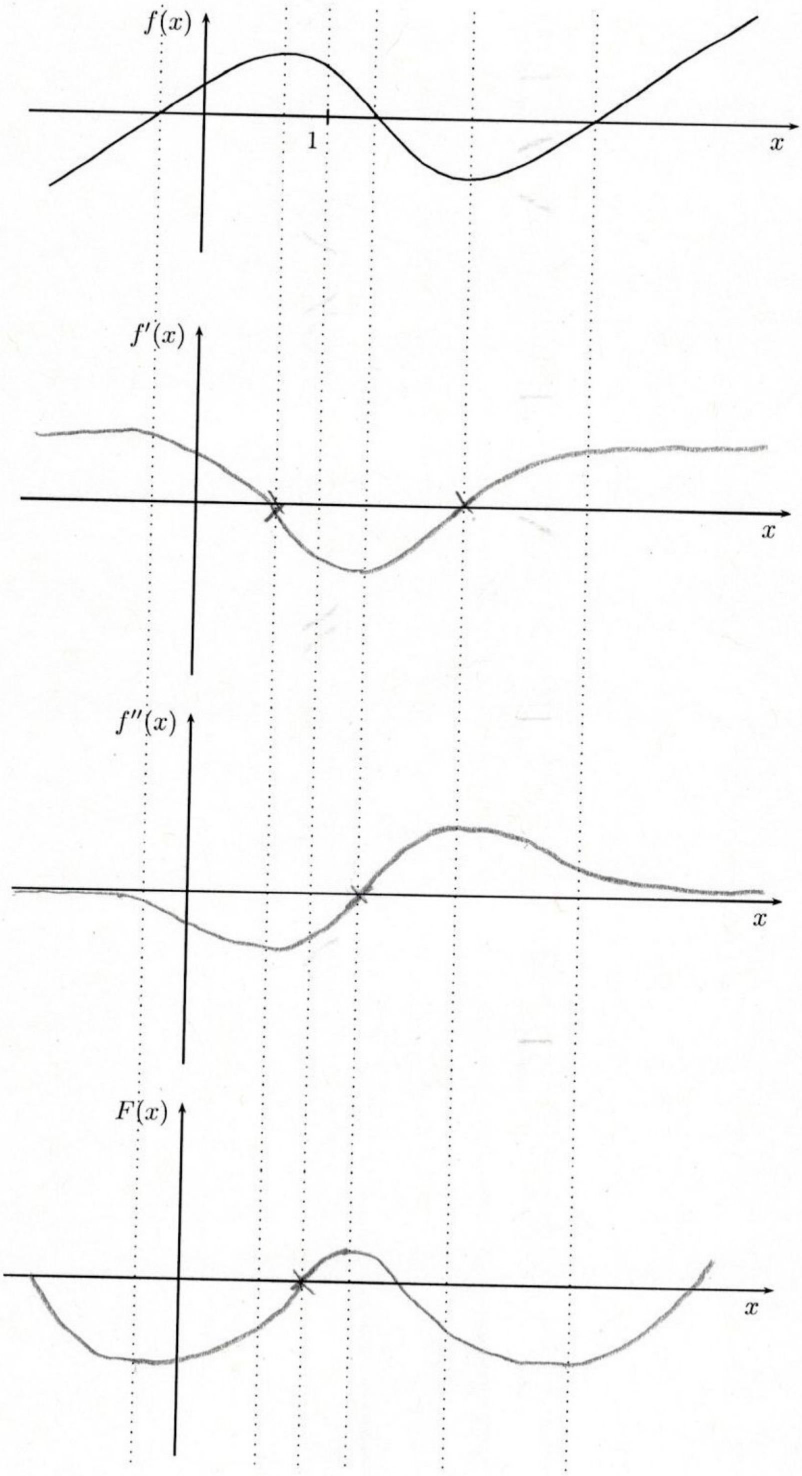
$$= \frac{8}{9\cdot 4\cdot 5} = \frac{2}{9\cdot 5} = \frac{2}{45}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Skizzieren Sie zu der angegebenen Funktion f in den darunter befindlichen Koordinatensystemen jeweils die erste und die zweite Ableitung sowie die Flächenfunktion

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Zur Orientierung sind die Nullstellen und Extremstellen sowie die 1 markiert.)



Aufgabe 8 (4 + 6 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich.

b) Zeigen Sie: Ist p ein Polynom und $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\left(\frac{p(x)}{(x-a)^n}\right)' = \frac{q(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

mit einem Polynom q.

Wie lässt sich q in Abhängigkeit von p, n und a darstellen?

a) $$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2)^2 - (x+1) \cdot 2 \cdot (x-2)}{[(x-2)^2]^2}$$

$$= \frac{(x-2) \cdot [(x-2) - (2x+2)]}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{-x-4}{(x-2)^3}$$

b) $$\left(\frac{p(x)}{(x-a)^n}\right)' = \frac{p'(x) \cdot (x-a)^n - p(x) \cdot n \cdot (x-a)^{n-1}}{[(x-a)^n]^2}$$

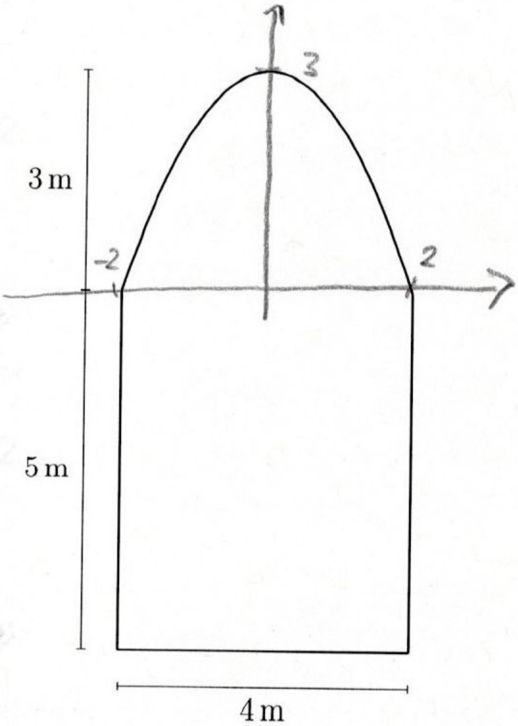
$$= \frac{(x-a)^{n-1} [p'(x) \cdot (x-a) - p(x) \cdot n]}{(x-a)^{2n}}$$

$$= \frac{q(x)}{(x-a)^{n+1}} \quad \text{mit } q(x) = p'(x) \cdot (x-a) - p(x) \cdot n$$

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Die Kirche St. Calculus besitzt Kirchenfenster, die oben parabelförmig gestaltet sind; die Skizze rechts zeigt die Maße.

Wieviel Quadratmeter Glas umfasst so ein Fenster?



Das untere Rechteck hat einen Flächeninhalt von

$4 \cdot 5\,m^2 = 20\,m^2$

Mit dem eingezeichneten KO-System wird die Parabel beschrieben durch

$f(x) = 3 - a x^2$

mit $0 = f(2) = 3 - a \cdot 4 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$,

also $f(x) = 3 - \frac{3}{4} x^2$.

Der entsprechende Flächeninhalt ist

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(3 - \frac{3}{4}x^2\right) dx = \left(3x - \frac{1}{4}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 6 - 2 - (-6 + 2) = 4 - (-4) = 8$$

$\Rightarrow$ Die gesamte Fläche ist $28\,m^2$

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+6x+8}$.

Partialbruchzerlegung von f:

Wegen der Nst -2 und -4 von x^2+6x+8 ist

$$\frac{x-2}{x^2+6x+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x+2)}{x^2+6x+8},$$

mit $x=-4$ in den Zählern: $-6 = B\cdot(-2) \Rightarrow B=3$

$x=-2$ $\qquad -4 = A\cdot 2 \Rightarrow A=-2$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int\left(\frac{-2}{x+2} + \frac{3}{x+4}\right)dx$$

$$= -2\cdot\ln|x+2| + 3\cdot\ln|x+4|$$

Aufgabe 11 (16 Punkte, davon bis zu 8 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle paarweise zueinander senkrecht stehenden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$?

Mit „0" ist dabei je nach Zusammenhang die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ bzw. der Nullvektor in $\mathbb{R}^3$ gemeint.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung" (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

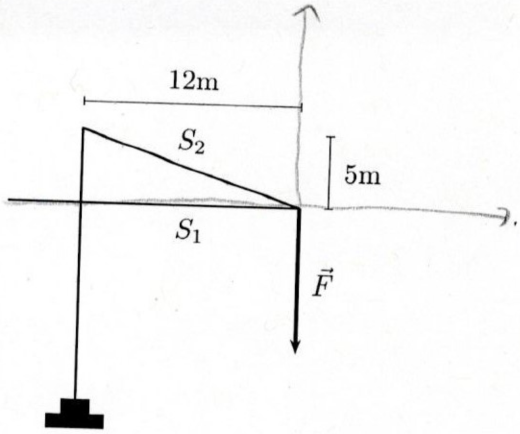
	gilt	gilt nicht	Enthalt.
$\vec{a} \times \vec{b} = 0$		X	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	X		
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 0$	X		
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$		X	
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$	X		
$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = 0$		X	
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$	X		
$\|\|\vec{a} \times \vec{b}\|\| = \|\|\vec{a}\|\| \cdot \|\|\vec{b}\|\|$	X		

Aufgabe 12 (10 Punkte)

An dem Ausleger eines Krans zieht eine Last mit einer Kraft $\vec{F}$ vom Betrag 1000N (s. Skizze).

Wie groß (betragsmäßig) sind die Kräfte in den Streben S_1 und S_2?

Anleitung: Die Kraft muss dargestellt werden als Linearkombination von in Richtung der Streben gerichteten Kraftvektoren.



Richtung von S_1: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

" von S_2: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Einheit 1000N

Gesucht: λ_1, λ_2 mit $\vec{F} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} 0 = -\lambda_1 - 12\lambda_2 \\ -1 = 5\lambda_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_2 = -\frac{1}{5} \\ \lambda_1 = -12 \cdot (-\frac{1}{5}) = \frac{12}{5} \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Kraft in S_1: $\| \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \| = \| \frac{12}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \frac{12}{5} = 2.4$

also 2400 N

Kraft in S_2: $\| \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \| = \| -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} \|$

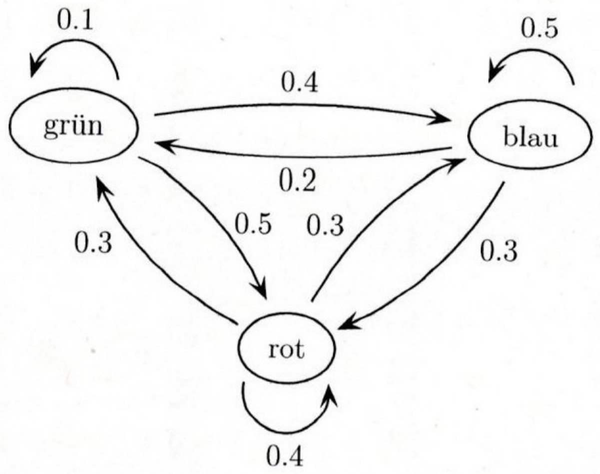
$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{12^2 + 5^2} = \frac{1}{5} \cdot \underbrace{\sqrt{144+25}}_{=\sqrt{169}=13}$

$= \frac{1}{5} \cdot 13 = 2{,}6$

also 2600 N

Aufgabe 13 $(2 + 3 + 6 = 11$ Punkte$)$

Eine neue Tiersorte wurde entdeckt: Das Trichamäleon kann seine Farbe zwischen grün, blau und rot wechseln. Das folgende Diagramm zeigt, welcher Anteil der Tiere einer Farbe sich nach einem Tag wie gewandelt hat. Beispielsweise ändern 40% der grünen Tiere ihre Farbe nach einem Tag auf blau, 50% auf rot, 10% bleiben grün.



a) Stellen Sie eine Matrix A auf, so dass man, wenn es heute g grüne, b blaue und r rote Tiere gibt, durch $A \cdot \begin{pmatrix} g \\ b \\ r \end{pmatrix}$ berechnen kann, wieviele Tiere der jeweiligen Farbe es morgen gibt.

b) Mit welcher Matrix B kann man mittels $B \cdot \begin{pmatrix} g \\ b \\ r \end{pmatrix}$ die Farbverteilung in zwei Tagen angeben?

Berechnen Sie konkret die Werte in der *ersten Spalte* von B (die weiteren Werte brauchen Sie nicht zu berechnen).

c) Wieviel grüne, blaue und rote Tiere gab es gestern, wenn heute 300 grüne, 900 blaue und 1000 rote Tiere beobachtet werden?

a) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$

b) $B = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & * & * \\ 0,4 & * & * \\ 0,5 & * & * \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,01 + 0,08 + 0,15 & * & * \\ 0,04 + 0,2 + 0,15 & * & * \\ 0,05 + 0,12 + 0,2 & * & * \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,24 & * & * \\ 0,39 & * & * \\ 0,37 & * & * \end{pmatrix}$

c) Gesucht: $\begin{pmatrix} g \\ b \\ r \end{pmatrix}$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} g \\ b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 300 \\ 0,4 & 0,5 & 0,3 & 900 \\ 0,5 & 0,3 & 0,4 & 1000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 10 \\ -4 \cdot I \\ -5 \cdot I \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 0 & -0,3 & -0,9 & -300 \\ 0 & -0,7 & -1,1 & -500 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \\ \cdot 10 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 0 & 1 & 3 & 1000 \\ 0 & -7 & -11 & -5000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + 7 \cdot II \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3000 \\ 0 & 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 0 & 10 & 2000 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{3}{10} III \\ -\frac{3}{10} III \\ : 10 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2400 \\ 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \cdot II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1600 \\ 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es gab 1600 grüne, 400 blaue und 200 rote Tiere