Aufgabe 1

a) $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{(x+2)^2}$

b) $f(x) = \frac{3}{x-4} + \frac{9}{(x+2)^2}$

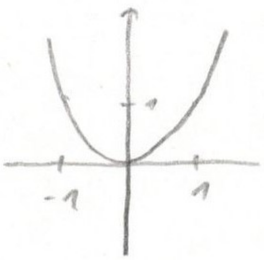
c) $f(x) = 3 + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{(x+2)^2}$

oder $f(x) = \frac{3x^3}{(x-4)\cdot(x+2)^2}$

d) $f(x) = \frac{3x^3 - 3}{(x-4)(x+2)^2}$

(es gibt viele andere Möglichkeiten)

Aufgabe 2



a) $D = [0;1]$ $W = [-1;1]$

b) $D = [-1;1]$ $W = [0;1]$

c) $D = [-1;1]$ $W = [-1;1]$

d) $D = [0;1]$ $W = [0;1]$

(Es gibt auch viele andere Möglichkeiten)

Aufgabe 3

a) Sei t_0 der 05.10.2020. Dann ist

$$3000 = f(t_0) = a \cdot e^{\lambda \cdot t_0}$$

$$4500 = f(t_0 + 7d) = a \cdot e^{\lambda \cdot (t_0 + 7d)}$$
$$= a \cdot e^{\lambda t_0 + \lambda \cdot 7d}$$
$$= a \cdot e^{\lambda t_0} \cdot e^{\lambda \cdot 7d}$$
$$= f(t_0) \cdot e^{\lambda \cdot 7d}$$
$$= 3000 \cdot e^{\lambda \cdot 7d}$$

$$\Rightarrow e^{\lambda \cdot 7d} = \frac{4500}{3000} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot 7d = \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{7d} \cdot \ln \frac{3}{2}$$

b) $$f(t_0 + 14d) = a \cdot e^{\lambda \cdot t_0 + 14d}$$
$$= a \cdot e^{\lambda t_0} \cdot e^{\lambda \cdot 14d}$$
$$= f(t_0) \cdot e^{\frac{1}{7d} \cdot \ln \frac{3}{2} \cdot 14d}$$
$$= 3000 \cdot \left(e^{\ln \frac{3}{2}}\right)^2$$
$$= 3000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= \frac{27000}{4} = 6750$$

c) $f(t)$ wächst sehr schnell und würde dann bald die Anzahl der Einwohner übersteigen

Aufgabe 4 $(2+4+2+4+6 = 18$ Punkte$)$

In den komplexen Zahlen seien

$$z_k = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{j}\right)^k \qquad \text{und} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

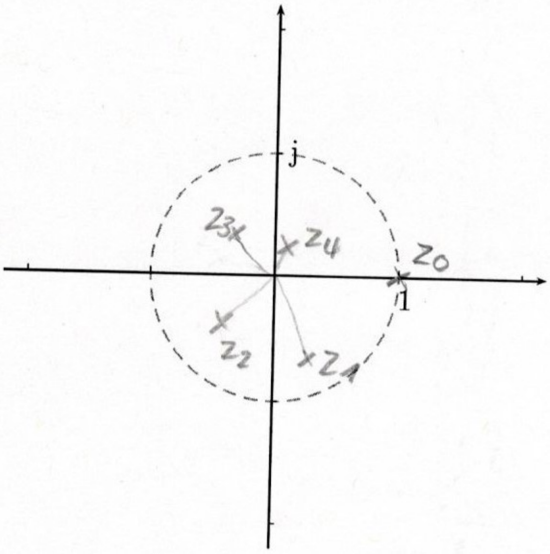
a) Berechnen Sie z_2.

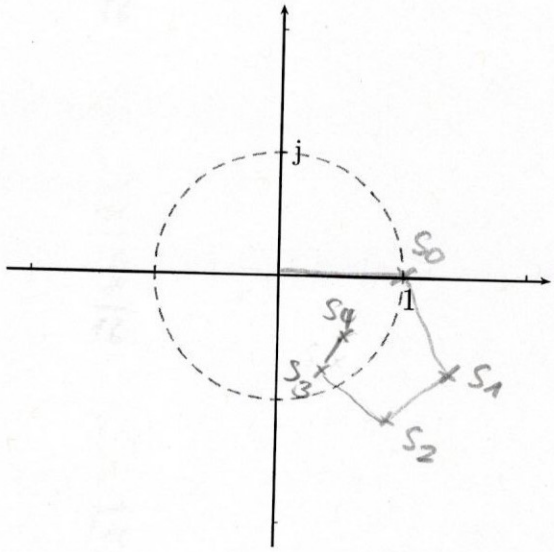
b) Markieren Sie in dem Bild links die ungefähre Lage von z_k zu $k = 0, \ldots, 4$.

c) Berechnen Sie s_2.

d) Markieren Sie in dem Bild rechts die ungefähre Lage von s_n zu $n = 0, \ldots, 4$.

e) Begründen Sie, warum $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert in der Form $a + b\mathrm{j}$ an.





a) $z_2 = \frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)j + \left(\frac{3}{4}j\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{3}{8}j - \frac{9}{16} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}j$

c) $s_2 = z_0 + z_1 + z_2 = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}j + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}j\right) = \frac{3}{4} - \frac{9}{8}j$

e) Wegen $\left|\frac{1}{4} - \frac{3}{4}j\right| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} < 1$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}j\right)} = \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}j} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1+j}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1-j}{1^2+1^2} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}j$$

Aufgabe 5

a) $$\frac{\arcsin(2x)-2x}{\sin x - x} = \frac{\left(2x + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{3}{40}(2x)^5 + \dots\right) - 2x}{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \dots\right) - x}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot 8x^3 + x^5\cdot(\dots)}{-\frac{1}{6}x^3 + x^5\cdot(\dots)}$$

$$= \frac{8/6 + x^2\cdot(\dots)}{-1/6 + x^2(\dots)}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} \frac{8/6}{-1/6} = -8$$

b) $$\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 3x \cancel{- x^2}}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

$$= \frac{3x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$\xrightarrow{x\to\infty} \frac{3}{2}$$

Aufgabe 6

a) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$

Hier ist $f'(x) = 2cx + \cos(3x^2) \cdot 6x$

$= 2x \cdot (c + 3\cos(3x^2))$

Da $\cos(3x^2)$ alle Werte zwisch. -1 und 1

annimmt ist $c + 3\cos(3x^2) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 3$,

also:

f ist mon. wachs. $\Leftrightarrow$ $c \geq 3$

b) f ist Linksgekrümmt $\Leftrightarrow$ $f''(x) > 0$

Hier ist $f''(x) = 2c + (-\sin(3x^2) \cdot 6x) \cdot 6x$

$+ \cos(3x^2) \cdot 6$

$= 2c + \cos(3x^2) \cdot 6 - 36x^2 \sin(3x^2)$

Bei festem c ist $2c + \cos(3x^2) \cdot 6$ beschränkt.

$\sin(3x^2)$ nimmt immer wieder für $x \to \infty$ den Wert $+1$

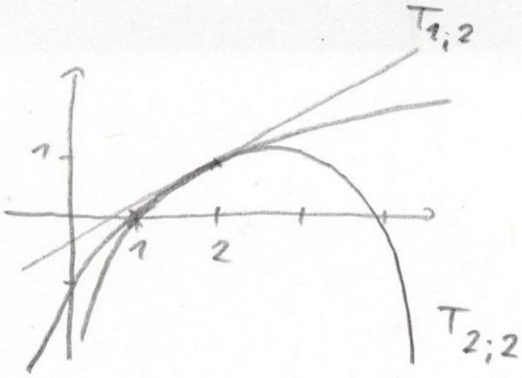
an, so dass $36x^2 \cdot \sin(3x^2)$ immer wieder $= 36x^2$

ist und damit irgendwann $> 2c + \cos(3x^2) \cdot 6$ ist,

also $f''(x) < 0$.

Aufgabe 7

a)



b) $T_{3;3}(x) = f(3) + f'(3)\,(x-3) + \frac{1}{2} f''(3)\cdot(x-3)^2 + \frac{1}{3!} f'''(3)\,(x-3)^3$

mit $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = +2 \cdot \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow T_{3;3}(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}(x-3)^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{27}(x-3)^3$

Aufgabe 8

a) $\int (3x+4)^5 \, dx = \frac{1}{18}(3x+4)^6$

b) $\int x \cdot e^{3x} \, dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} \, dx$

$= x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$

c) $\int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2)$

d) Partialbruchzerlegung: Wegen $x^2 + x = x \cdot (x+1)$ ist

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x \cdot (x+1)}$$

$x = 0$ in Zähler : $1 = A$

$x = -1$ " " : $1 = -B \Rightarrow B = -1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2+x} \, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

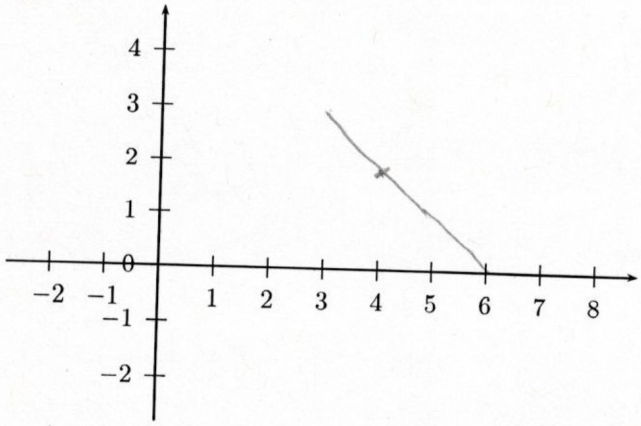
$$= \ln|x| - \ln|x+1|$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

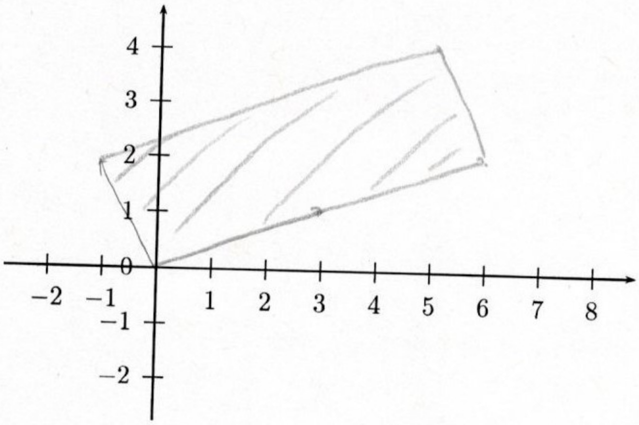
Skizzieren Sie die angegebenen Mengen M in den Koordinatensystemen.

Hinweis: Achten Sie auf die Parameterbereiche!

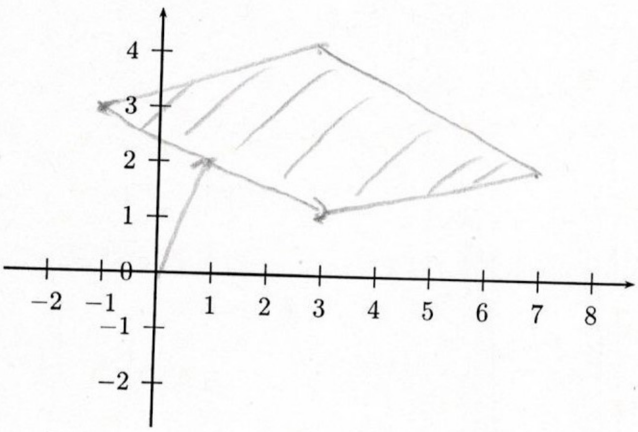
a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in [-1, 2] \right\}$



b) $M = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in [0, 2], \mu \in [0, 1] \right\}$



c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in [-1, 1], \mu \in [0, 1] \right\}$



Aufgabe 10

a) $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3a + 2 - 1 = 3a + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad 3a = -1$

$\Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$

b) $\cos 45° \overset{!}{=} \dfrac{\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2+1}{\sqrt{a^2+4+1} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{a^2+5} \cdot \sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+5} = 3$

$\Leftrightarrow \quad a^2+5 = 9$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$

c) $7 \overset{!}{=} \left\| \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3+a \\ -6 \end{pmatrix} \right\|$

$= \sqrt{4 + (3+a)^2 + 36} = \sqrt{40 + (3+a)^2}$

$\Leftrightarrow \quad 49 = 40 + (3+a)^2$

$\Leftrightarrow \quad 9 = (3+a)^2$

$\Leftrightarrow \quad 3+a = 3$ oder $3+a = -3$

$\Leftrightarrow \quad a = 0$ oder $a = -6$

Aufgabe 11

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \\ +\mathrm{II} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ +2\cdot\mathrm{II} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) 1)
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \; x_2 \; x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \; x_2 \; x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot (x_1 + x_2 + 2x_3) + x_2 \cdot (-x_1) + x_3 \cdot (x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

$$= x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2x_2 x_3 - 3x_3^2$$

$$= x_1^2 + 3x_1 x_3 - 2x_2 x_3 - 3x_3^2$$

(kann man auch direkt angeben)

2)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1.5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$