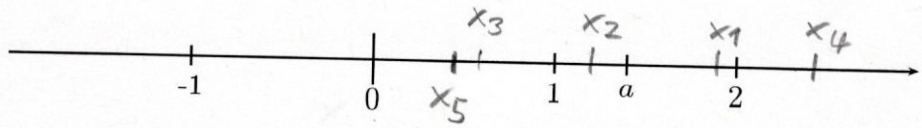
Aufgabe 1 (7 Punkte)

Markieren Sie zu a auf dem Zahlenstrahl jeweils (falls definiert) die ungefähre Lage von

$$x_1 = a^2, \quad x_2 = \sqrt{a}, \quad x_3 = \frac{1}{a}, \quad x_4 = 2^a, \quad x_5 = \log_2 a,$$

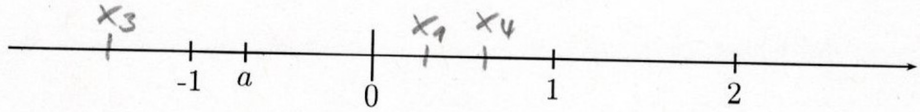
bzw. notieren Sie in der Zeile „nicht definiert:“ das x_k, falls es nicht definiert ist.

a)



nicht definiert:

b)



nicht definiert: x_2, x_5

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es gilt $\sin(0.93) \approx 0.80$.

Tragen Sie davon ausgehend ungefähre Werte x (auf zwei Dezimalstellen genau) in die Tabelle ein, die jeweils die Bedingung links erfüllen.

Sie können mit $\pi \approx 3.14$ rechnen.

Es reicht die Angabe von *einem* x-Wert, auch wenn es mehrere x gibt, die die Bedingung erfüllen.

Bedingung	$x \approx$
$1 < x < 6$ und $\sin(x) = 0.8$	$\pi - 0{,}93 \approx 2{,}21$
$x < 0$ und $\sin(x) = 0.8$	$-2\pi + 0{,}93 \approx -5{,}35$
$\sin(x) = -0.8$	$-0{,}93$
$x = \arccos(-0.8)$	$\frac{\pi}{2} + 0{,}93 \approx 2{,}50$
$\cos(0.93) = x$	$\sqrt{1-0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}60$

Aufgabe 3

a) Offensichtlich ist 2 Nst.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 \quad - x - 6) : (x-2) = x^2 + 2x + 3 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad 2x^2 - x \\
\quad \underline{-(2x^2 - 4x)} \\
\qquad 3x - 6 \\
\qquad \underline{-(3x-6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Nst: $x = -1 \pm \sqrt{1-3}$

$= -1 \pm \sqrt{2}\, j$

$\Rightarrow p(x) = (x-2) \cdot (x - (-1 + \sqrt{2} j)) \cdot (x - (-1 - \sqrt{2} j))$

b) Es gilt: $5 + 7j = m \cdot 2 + b$ I

$6 - j = m(1-2j) + b$ II

I-II liefert $-1 + 8j = m \cdot (1 + 2j)$

$$\Rightarrow m = \frac{-1+8j}{1+2j} = \frac{(-1+8j)(1-2j)}{1^2+2^2} = \frac{-1+2j+8j+16}{5}$$

$$= \frac{15+10j}{5} = 3 + 2j$$

In I: $b = 5 + 7j - (3+2j) \cdot 2$

$= 5 + 7j - 6 - 4j$

$= -1 + 3j$

Aufgabe 4

a) $G_1 = (G_0 + 5000\,€) \cdot (1 - 0{,}1)$

$= 15.000 \cdot 0{,}9$

$= 13.500$

b) $G_{n+1} = (G_n + 5000\,€) \cdot 0{,}9$

c) Für $G = \lim\limits_{n \to \infty} G_n$ gilt

$G = (G + 5000\,€) \cdot 0{,}9$

$= 0{,}9\,G + 4500\,€$

$\Leftrightarrow 0{,}1\,G = 4500\,€$

$\Leftrightarrow G = 45000\,€$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	konvergiert	konv. nicht	Enthaltung
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$		x	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$	x		
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k+2}{(k+1)^3}$		x	
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k}$	x		
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 2^k$	x		
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$		x	

Aufgabe 6

a) $w'(h) = \frac{1}{2\sqrt{2Rh+h^2}} \cdot (2R+2h)$

$$= \frac{R+h}{\sqrt{2Rh+h^2}}$$

b) Für die Änderung der Weite Δw gilt

$$\Delta w \approx w'(h) \cdot \Delta h$$

$$\overset{a)}{=} \frac{R+h}{\underbrace{\sqrt{2Rh+h^2}}_{=w(h)}} \cdot \Delta h$$

$$= \frac{R+h}{w(h)} \cdot \Delta h$$

c) Hier also:

$$\Delta w \approx \frac{6370\,\text{km} + 0{,}1\,\text{km}}{35\,\text{km}} \cdot 0{,}002\,\text{km}$$

$$\approx \frac{7000\,\text{km}}{35\,\text{km}} \cdot 0{,}002\,\text{km}$$

$$= \frac{7 \cdot 2}{35}\,\text{km}$$

$$= \frac{2}{5}\,\text{km} = 400\,\text{m}$$

Aufgabe 7

a) Gesucht: Nst. von $f(x) = x^2 - 3$

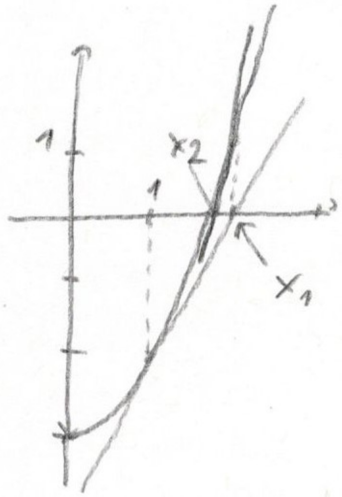
$$f'(x) = 2x$$

Newton-Iteration: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-2}{2} = 1 + 1 = 2$$

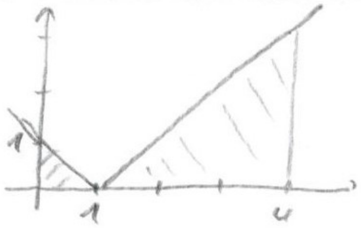
$$x_2 = 2 - \frac{4-3}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

b)



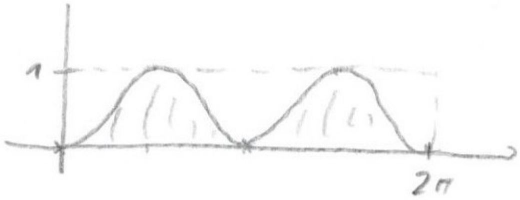
Aufgabe 8

a)



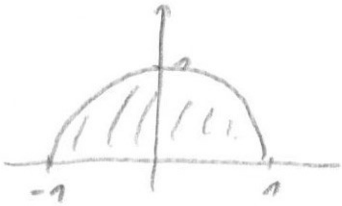
$$\int_0^4 |x-1| \, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 5$$

b)



$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$$

c)



$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \pi$$ (halbe Kreisfläche)

Aufgabe 9

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx \overset{x=u^2}{\underset{dx=2u\,du}{=}} \int \frac{1}{u^2+u}\cdot 2u\,du$$

$$= 2\cdot\int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= 2\cdot \ln|u+1|$$

$$\overset{\sqrt{x}=u}{=} 2\cdot \ln(\sqrt{x}+1)$$

Aufgabe 10

a) $v(x) = x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow v = 1 \cdot v_3 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_1$

b) $v(x) = \sin x \cdot \cos 1 + \cos x \cdot \sin 1$

$\Rightarrow v = \cos 1 \cdot v_1 + \sin 1 \cdot v_2$

c) $v(x) = e \cdot e^x$

$\Rightarrow v = e \cdot v_2$

d) $x^2 - x - 2$ hat Nst 2 und -1, also Ansatz

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$x = -1$ in Zähler: $-1 = B \cdot (-3) \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

$x = 2$ " " $\quad 2 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow v(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow v = \frac{2}{3} \cdot v_{-2} + \frac{1}{3} \cdot v_1$

Aufgabe 11

a) Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wegen $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$ ist

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 \right\}$$

b) Richtungsvektoren sind (z.B.) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$ ist

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(Hier sind auch viele andere Darstellungen möglich)

c) Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E_1 steht nicht senkrecht auf dem Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ von E_2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow E_1 \nparallel E_2$

(Es gibt auch viele andere Argumentationsmöglichkeiten)

Aufgabe 12

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I \\ -2\cdot I \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\underline{II} \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\underline{III} \\ -2\cdot\underline{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 13

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\det A = 2 + 0 + 0 - (-3) - 0 - 0$$
$$= 5$$

$$\det(2A) = \underset{\uparrow}{2^3} \cdot \det A = 8 \cdot 5 = 40$$

aus jeder Zeile 2 herausziehen

$$\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A)$$
$$= 5 \cdot 5 = 25$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{5}$$