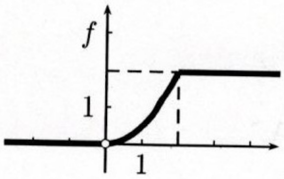
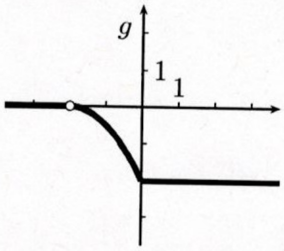
Aufgabe 1 $(2+3+3=8$ Punkte)

Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ besitze den folgenden Funktionsgraf:



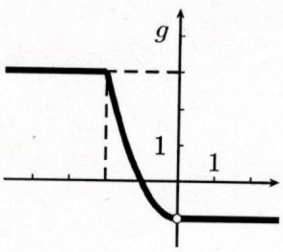
Wie lautet der funktionale Zusammenhang zwischen g und f bei folgenden Funktionsgrafen zu g? Notieren Sie die Formel neben die Bilder.

a)



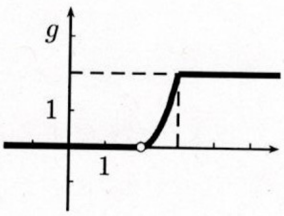
$g(x) = -f(x+2)$

b)



$g(x) = 2\cdot f(-x) - 1$

c)



$g(x) = f(2(x-2))$

$= f(2x-4)$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig.

Welche Symmetrie ergibt sich bei den angegebenen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

	gerade	ungerade	im Allgemeinen keines von beiden
$g(x) = f(x) + f(-x)$	X		
$g(x) = f(x) - f(-x)$		X	
$g(x) = f(x) \cdot f(-x)$	X		
$g(x) = \frac{f(x)}{f(-x)}$			X
$g(x) = f(x^2)$	X		
$g(x) = \left(f(x)\right)^2$			X

Aufgabe 3 (4 + 4 = 8 Punkte)

a) Markieren Sie die richtige alternative Darstellung (gerundet) der folgenden komplexen Zahlen. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

$3 - 4\mathrm{j} =$	
$3.26 \cdot e^{-0.927\mathrm{j}}$	
$3.26 \cdot e^{1.35\mathrm{j}}$	
$3.26 \cdot e^{-1.35\mathrm{j}}$	
$5 \cdot e^{1.35\mathrm{j}}$	
$5 \cdot e^{-0.927\mathrm{j}}$	X
$5 \cdot e^{\pi\mathrm{j}}$	

$2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{j}} =$	
$1.732 + \mathrm{j}$	X
$1 - 1.732\mathrm{j}$	
$1.732 + 2\mathrm{j}$	
$2 + 1.732\mathrm{j}$	
$-1.732 + 2\mathrm{j}$	
$1.732 - 2\mathrm{j}$	

b) Berechnen Sie

b1) $(4 - \mathrm{j}) \cdot (3 + 2\mathrm{j}) = 12 + 8j - 3j - 2j^2$

$= 14 + 5j$

b2) $\dfrac{4 - \mathrm{j}}{3 + 2\mathrm{j}} = \dfrac{(4-j)\cdot(3-2j)}{3^2+2^2} = \dfrac{12 - 8j - 3j + 2j^2}{13}$

$= \dfrac{10}{13} - \dfrac{11}{13}j$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Geben Sie den Wert der folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) an oder notieren Sie „n.ex.", falls der Grenzwert nicht existiert (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{n^2+1} \quad = \quad 4$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2}{2^n+3} \quad = \quad \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2}{x+1} \quad = \quad \infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{x-1} \quad =$ n. ex.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} \quad = \quad 1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sin x} \quad =$ n. ex.

Aufgabe 5

a) $100 = f(k) = 1000 \cdot 0{,}95^k$

$\Leftrightarrow \frac{1}{10} = 0{,}95^k$

$\Leftrightarrow k = \log_{0.95} \frac{1}{10}$

b) Summe der Erkrankten

$= f(0) + f(1) + f(2) + \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} 1000 \cdot 0{,}95^k = 1000 \cdot \frac{1}{1-0{,}95} = 1000 \cdot \frac{1}{0{,}05}$

$= \frac{100000}{5} = 20.000$

c) Gesucht: N mit

$$15.000 < \sum_{k=0}^{N} f(k) = 1000 \cdot \sum_{k=0}^{N} 0{,}95^k$$

$$= 1000 \cdot \frac{1-0{,}95^{N+1}}{1-0{,}95}$$

$$= \frac{1000}{0{,}05} \cdot (1-0{,}95^{N+1})$$

$$= 20.000\,(1-0{,}95^{N+1})$$

$\Leftrightarrow \frac{15000}{20000} < 1 - 0{,}95^{N+1}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < 1 - 0{,}95^{N+1}$

$\Leftrightarrow 0{,}95^{N+1} < 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow N+1 > \log_{0.95} \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow N > \log_{0.95} \frac{1}{4} - 1$

Aufgabe 6

a) $f(x) = \frac{x}{bx} + \frac{2}{bx} = \frac{1}{b} + \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 + \frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{bx^2}$

b) $f'(s) = \frac{1 \cdot (s+b)^2 - (s+1) \cdot 2 \cdot (s+b)}{((s+b)^2)^2}$

$= \frac{\cancel{(s+b)} \cdot [(s+b) - (s+1) \cdot 2]}{(s+b)^{\cancel{4}\,3}}$

$= \frac{s+b-2s-2}{(s+b)^3} = \frac{b-2-s}{(s+b)^3}$

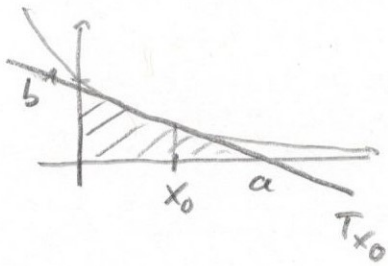
c) $g(y) = \ln c + 2 \cdot \ln y$

$\Rightarrow g'(y) = 0 + 2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

d) $h(a) = a^3 \cdot a^{1/2} \cdot \sqrt{\sin a} = a^{3{,}5} \cdot \sqrt{\sin a}$

$\Rightarrow h'(a) = 3{,}5 \cdot a^{2{,}5} \cdot \sqrt{\sin a} + a^{3{,}5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin a}} \cdot \cos a$

Aufgabe 7



Es ist $T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$= e^{-x_0} + (-e^{-x_0})\cdot(x-x_0)$

$= -e^{-x_0}\cdot x + e^{-x_0}(1+x_0)$

Also ist $b = e^{-x_0}(1+x_0)$

und a erfüllt $0 = T_{x_0}(a)$

$= -e^{-x_0}\cdot a + e^{-x_0}(1+x_0)$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x_0}\cdot a = e^{-x_0}(1+x_0)$

$\Leftrightarrow \quad a = 1+x_0$

Damit ist der Flächeninhalt

$\frac{1}{2} a\cdot b = \frac{1}{2}\cdot e^{-x_0}(1+x_0)\cdot(1+x_0)$

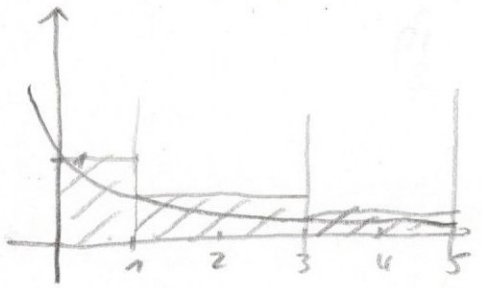
$= \frac{1}{2} e^{-x_0}\cdot(1+x_0)^2$

Aufgabe 8

a) $\int_0^5 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1}\Big|_0^5 = -\frac{1}{5+1} - \left(-\frac{1}{0+1}\right)$

$= -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$

b) + c)



$S = f(0)\cdot(1-0) + f(1)\cdot(3-1) + f(3)\cdot(5-3)$

$= 1 \cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 2$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$= \frac{8+4+1}{8} = \frac{13}{8}$

Aufgabe 9

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\ln x}\,dx$$

$x = e^u$

$\ln x = u$

$=$

$\frac{1}{x}dx = du$

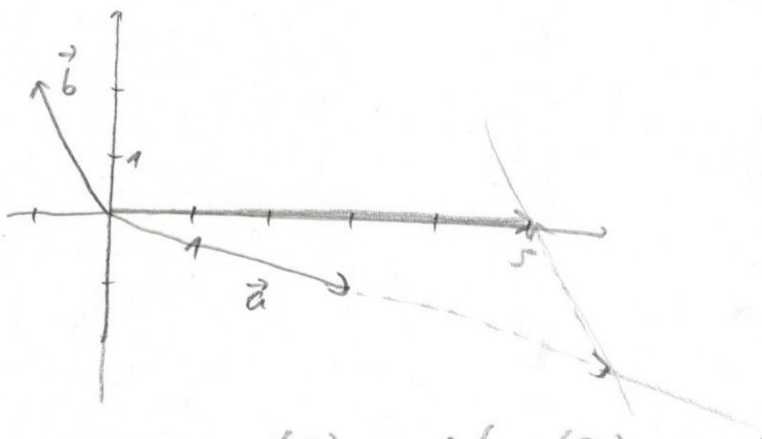
$dx = x\,du$

$dx = e^u du$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+u}\cdot e^u\,du$$

Aufgabe 10

a)

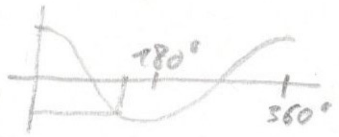


$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(2\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

c) $$\varphi = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \arccos\frac{-3-2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$$

$$= \arccos\frac{-5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



$$= 135^\circ$$

Aufgabe 11

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(Es gibt auch viele andere Möglichkeiten)

Aufgabe 12

Es muss gelten

$$0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$0 = \vec{v}_2 \cdot \vec{x} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

$$0 = \vec{v}_3 \cdot \vec{x} = 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4$$

als erw. koeff. matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -2\cdot\mathrm{III} \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen sind $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$, d.h. $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ tut's.

Aufgabe 13

a) Für $\begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix}$ muss.

wegen 2. Komp: $\underline{0 = c}$

wegen 3. Komp. $-b + 1 - 2 = 2 \Leftrightarrow -b = 3 \Leftrightarrow \underline{b = -3}$

wegen 1. Komp. $a \cdot \underset{\overset{\uparrow}{b}}{(-3)} + 3 + 2 = -1 \Leftrightarrow a \cdot (-3) = -6$

$\Leftrightarrow \underline{a = 2}$

b)

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}}{\det \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}}$$

$$= \frac{0 + (-3) + 0 - (-4) - a - 0}{2a + (-3) + 0 - 2 - a - 0} = \frac{1-a}{a-5}$$

Für $x_3 = 3$ muss also gelten

$$\frac{1-a}{a-5} = 3 \Leftrightarrow 1 - a = 3(a-5) = 3a - 15$$

$$\Leftrightarrow 16 = 4a$$

$$\Leftrightarrow a = 4$$