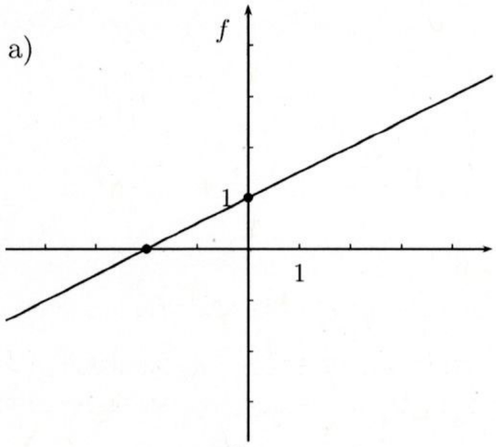
Aufgabe 1 ($2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ Punkte)

Geben Sie eine Funktionsvorschrift für die folgenden Geraden und Parabeln an!

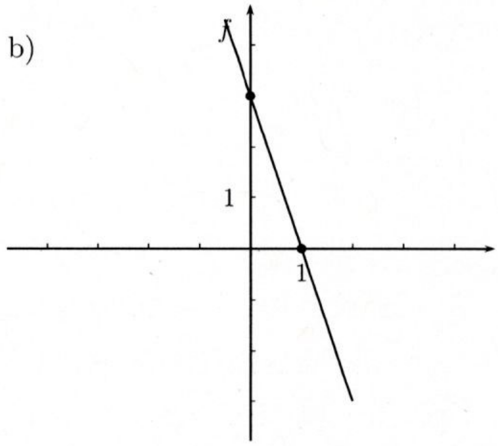
(Die markierten Punkte entsprechen jeweils ganzzahligen Koordinatenwerten.
Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

a)



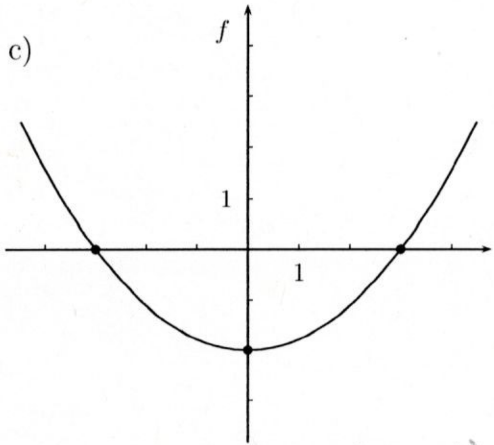
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

b)



$f(x) = -3x + 3$

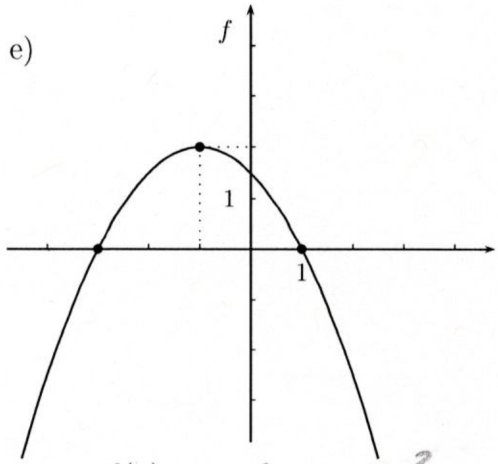
c)



$f(x) = \frac{2}{9}(x-3)(x+3)$

oder $= \frac{2}{9}x^2 - 2$

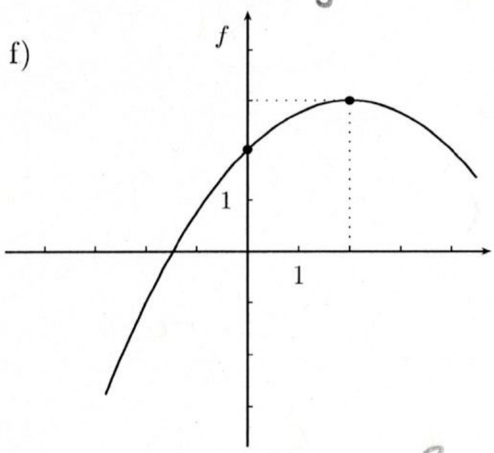
e)



$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2$

oder $= -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

f)



$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 3$

Aufgabe 2

$x^2 - x - 6$ hat Nst -2 und 3, daher Ansatz

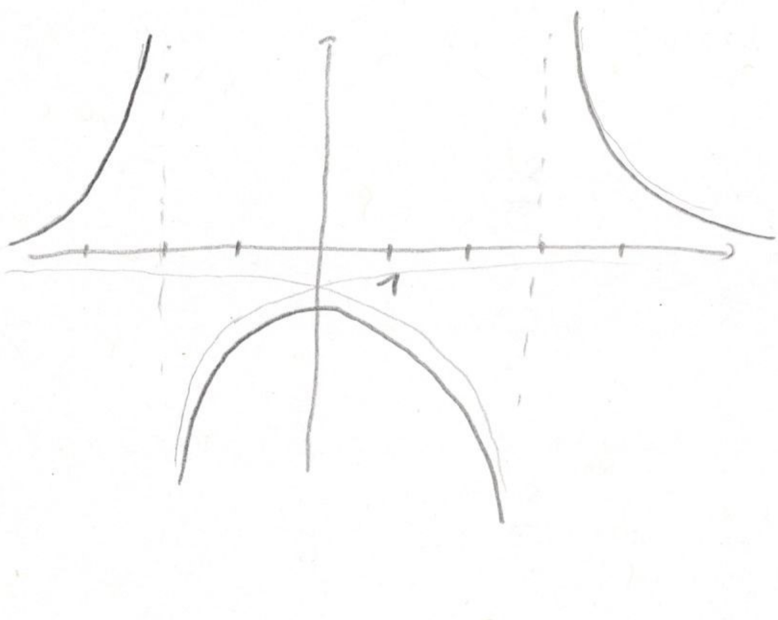
$$\frac{x+7}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Einsetzen von $x=3$ in Zähler: $10 = B \cdot 5 \Rightarrow B = 2$

" " $x=-2$ " " $5 = A \cdot (-5) \Rightarrow A = -1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-3}$$



Aufgabe 3 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

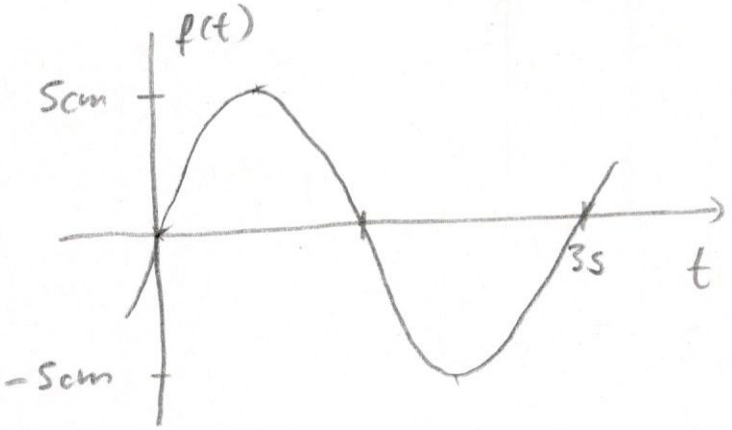
Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$?

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.
(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

	gilt	gilt nicht
$\sin(x-\pi) = -\sin x$	X	
$\tan(x-\pi) = \tan x$	X	
$\sin x + \sin y = \sin(x+y)$		X
$\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x = \sin x$	X	
$\tan x \cdot \cot x = 1$	X	
$1 - \tan^2 x = \sin^2 x$		X
$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$	X	
$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 1$		X

Aufgabe 4

a)



$$f(t) = 5cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3s} \cdot t\right)$$

b) Geschwindigkeit ist $f'(t) = 5cm \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3s} \cdot t\right) \cdot \frac{2\pi}{3s}$

$$= \frac{10\pi}{3} \frac{cm}{s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3s} t\right),$$

die offensichtlich bei $t = 0$ maximal ist mit

Wert $\frac{10\pi}{3} \frac{cm}{s}$

Aufgabe 5 $(1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 = 13$ Punkte)

a) Geben Sie zu 1), 2), 3) und 4) jeweils eine komplexe Zahl z in der Form $z = a + b\mathrm{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$, an, die die entsprechende Eigenschaft besitzt.

1) Der Betrag von z ist $\sqrt{17}$.

$4 + \mathrm{j}$ oder $1 + 4\mathrm{j}$ oder $\sqrt{17} + 0\mathrm{j}$ oder...

2) Der Realteil von z ist 3 und der Betrag von z ist 5.

$3 + 4\mathrm{j}$ oder $3 - 4\mathrm{j}$

3) Die komplex konjugierte Zahl zu z ist $-z$.

j oder $3\mathrm{j}$ oder 0, oder...

4) $z^2 = 8\mathrm{j}$.

$2 + 2\mathrm{j}$

b) Geben Sie zu 1), 2) und 3) jeweils eine komplexe Zahl z in der Polardarstellung $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, $r \geq 0$, an, die die entsprechende Eigenschaft besitzt.

1) Der Betrag von z ist 11.

$11 \cdot e^{\mathrm{j}}$ oder $11 \cdot e^{\mathrm{j}0}$ oder $11 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \frac{\pi}{2}}$ oder...

2) Der Imaginärteil von z ist 3.

$3 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \frac{\pi}{2}}$

3) $z^2 = 4\mathrm{j}$.

$2 \cdot e^{\mathrm{j} \cdot \pi/4}$

Hinweis: Durch die Angaben ist z nicht eindeutig bestimmt. Es reicht die Angabe von *einem* z.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Geben Sie die Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) der folgenden Folgen an.

(Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{(n+2)\cdot n + 3} = 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^4} = \infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^2}{x + 1} = -\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x^2}{x + 1} = +\infty$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3^n}{n^3 + 2^n} = \infty$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \infty$

g) $\lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x = 0$

h) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 0.6^k = \frac{1}{1-0{,}6} = \frac{1}{0{,}4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \infty$

Aufgabe 7

a) Mit $f(x) = x^4$ ist wegen $f'(x) = 4x^3$

$$
\begin{aligned}
2{,}1^4 - 2^4 &= f(2{,}1) - f(2) = f(2+0{,}1) - f(2) \\
&\approx 0{,}1 \cdot f'(2) \\
&= 0{,}1 \cdot 4 \cdot 2^3 = 0{,}1 \cdot 32 \\
&= 3{,}2
\end{aligned}
$$

b) Mit $f(x) = \ln x$ ist wegen $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
\ln 5 - \ln 4{,}8 &= f(5) - f(5-0{,}2) \\
&= -\left(f(5-0{,}2) - f(5) \right) \\
&\approx -(-0{,}2) \cdot f'(5) \\
&= 0{,}2 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \\
&= 0{,}04
\end{aligned}
$$

c) Mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist wegen $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{26} &= f(25+1) \\
&\approx f(25) + 1 \cdot f'(25) \\
&= 5 + 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 5} \\
&= 5 + \frac{1}{10} \\
&= 5{,}1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

a) $f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot x - e^{-x} \cdot 1}{x^2} = -e^{-x} \frac{x+1}{x^2}$

$f''(x) = +e^{-x} \cdot \frac{x+1}{x^2} + (-e^{-x}) \cdot \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \quad " \quad - e^{-x} \cdot \frac{x - (x+1) \cdot 2}{x^3}$

$= e^{-x} \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{-x-2}{x^3} \right)$

$= e^{-x} \frac{x^2 + x + x + 2}{x^3} = e^{-x} \cdot \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

Notw. Bed. für Extremstelle:

$0 \overset{!}{=} f'(x) = -e^{-x} \frac{x+1}{x^2} \iff 0 = x+1 \iff x = -1$

Wegen $f''(-1) = e^{1} \cdot \frac{1-2+2}{(-1)^3} = -e < 0$ ist $x = -1$ Maxstelle.

Das Vorzeichen von f'' entscheidet das Krümmungsverhalten.

Da $e^{-x} > 0$ und $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ für alle x ist,

ist $f''(x) = e^{-x} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} > 0$ für $x > 0$ und

$\quad " \quad = \quad " \quad < 0$ für $x < 0$, also

Linksgekrümmt für $x > 0$ und rechtsgekr. für $x < 0$

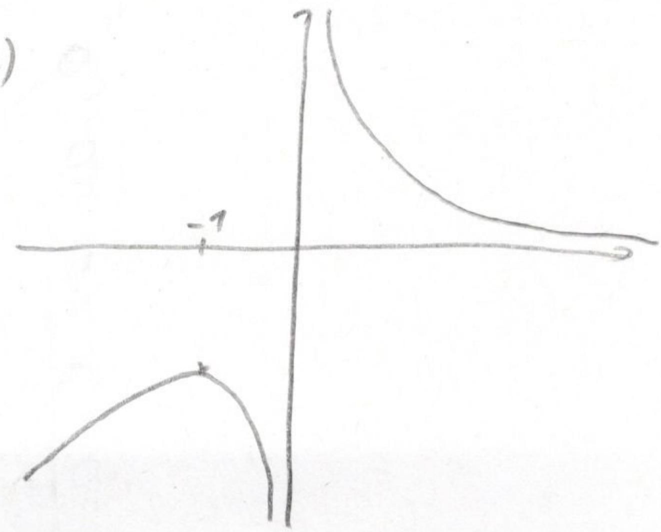
b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

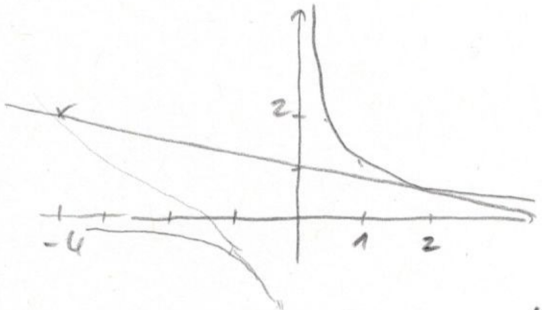
$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

c)



Aufgabe 9



An einer Stelle x_0 ist die Tangentengleichung

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$= \frac{1}{x_0} + \left(-\frac{1}{x_0^2}\right)\cdot(x-x_0)$$

$$= \frac{x_0-(x-x_0)}{x_0^2} = \frac{2x_0-x}{x_0^2}$$

Nun soll gelten:

$$2 \overset{!}{=} t_{x_0}(-4) = \frac{2x_0+4}{x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_0^2 = 2x_0 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 = x_0 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 - x_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = -1 \text{ oder } x_0 = 2$$

$\Rightarrow$ Für die Punkte $(-1; -1)$ und $(2; \frac{1}{2})$

führt die Tangente durch $(-4; 2)$

Aufgabe 10

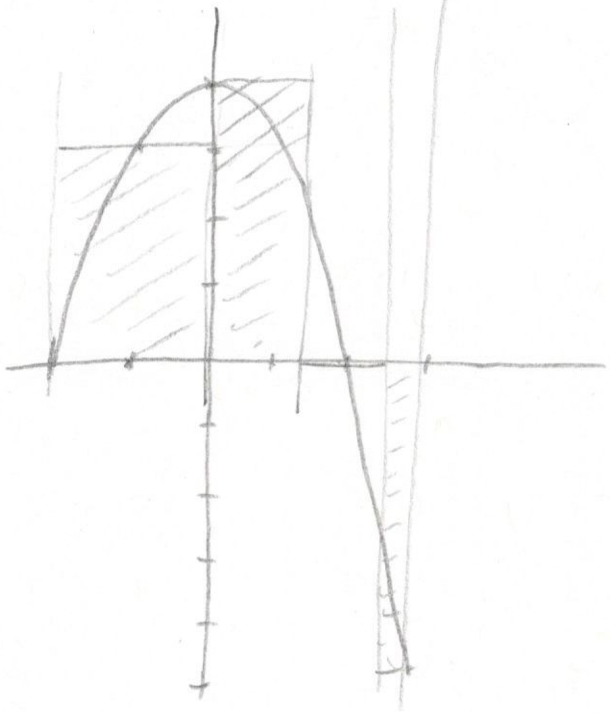
a) $\int_{-2}^{3} (-x^2+4)\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_{-2}^{3}$

$= -9+12-\left(+\frac{8}{3}-4\cdot 2\right)$

$= 3 + \frac{16}{3}$

$= \frac{25}{3}$

c)



b) $S = f(-1)\cdot(0-(-2)) + f(0)\cdot(1{,}5-0)$
$+ f(2)\cdot(2{,}5-1{,}5) + f(3)\cdot(3-2{,}5)$

$= 3\cdot 2 + 4\cdot 1{,}5$
$+ 0\cdot 1 + (-5)\cdot 0{,}5$

$= 6 + 6 - 2{,}5 = 9{,}5$

Aufgabe 11

a) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^x \, dx = (x+1)\cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x \, dx$

$= 2\cdot e^1 - 1\cdot 1 - e^x \Big|_0^1$

$= 2\cdot e - 1 - (e^1 - 1)$

$= e$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{3}\cdot \sin^3(x) \Big|_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$

Aufgabe 12

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$

$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\varphi = \arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = \arccos \frac{3}{\underbrace{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}_{= \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6}}$

$= \arccos \frac{3}{6} = \arccos \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ldots$

Aufgabe 13

Umformung von E_1 in Normalendarstellung:

Ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wegen $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 6 = 0$ ist

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Für Punkte auf der Schnittgeraden gilt also

$$\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 + \lambda \cdot (-2) + \mu \cdot 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 + 2\mu$$

Also sind die Punkte auf der Schnittgeraden

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (3+2\mu) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Schnittgerade} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 14 $(2+2+4=8$ Punkte)

Geben Sie an, für welche der auftretenden Parameter die linearen Gleichungssysteme, die durch die dargestellten erweiterten und schon weitgehend in Zeilen-Stufen-Form gebrachten Koeffizientenmatrizen beschrieben werden, keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Hinweis: Sie brauchen die Lösung nicht zu bestimmen. Machen Sie Fallunterscheidungen entsprechend der Parameter, um dann zu Aussagen wie z.B. „für $a = 1$ keine Lösung, für $a \neq 1$ genau eine Lösung“ zu kommen.

	keine Lösungen	genau eine Lösungen	unendlich viele Lösungen
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{array}\right)$	$a=0$	$a \neq 0$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{array}\right)$	$a=0$		$a \neq 0$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$	$a=0$ $b \neq 2$	$a \neq 0$	$a=0$ $b=2$

Aufgabe 15

a) $$\begin{pmatrix} m_{A,1} \\ m_{B,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{A,0} \\ m_{B,0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500g \\ 500g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 450g + 200g \\ 50g + 300g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 650g \\ 350g \end{pmatrix}$$

b) Durch $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,6 \\ 0,15 & 0,4 \end{pmatrix}$

c) $$\begin{pmatrix} 500g \\ 500g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{A,-1} \\ m_{B,-1} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0,9 & 0,4 & 500 \\ 0,1 & 0,6 & 500 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \cdot 10 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5000 \\ 9 & 4 & 5000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -9 \cdot I \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5000 \\ 0 & -50 & -40.000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-50) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 5000 \\ 0 & 1 & 800 \end{array}\right) \begin{array}{l} -6 \cdot II \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 800 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_{A,-1} \\ m_{B,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16 (maximal 10, minimal 0 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle invertierbaren Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n > 1)$?

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht
$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$		X
$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		X
$(A+B)^T = A^T + B^T$	X	
$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$		X
$(A \cdot A^T)^T = A \cdot A^T$	X	
$(A \cdot B^T)^T = A \cdot B^T$		X
$\det(2 \cdot A) = 2 \cdot \det(A)$		X
$\det(A+B) = \det A + \det B$		X
$\det(A^2) = (\det A)^2$	X	
$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$	X	