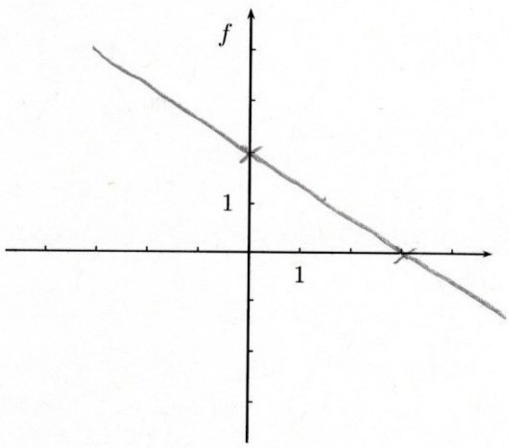
Aufgabe 1 $(1 + 5 \times 2 = 11$ Punkte)

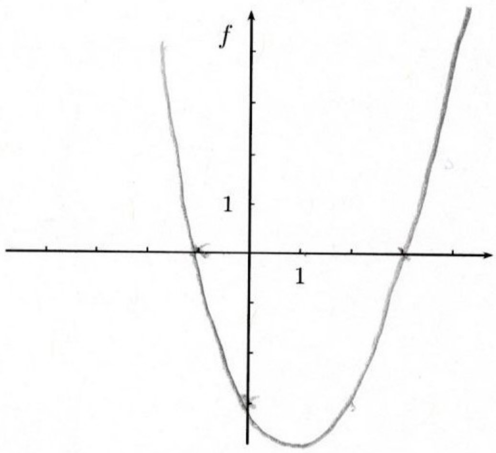
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



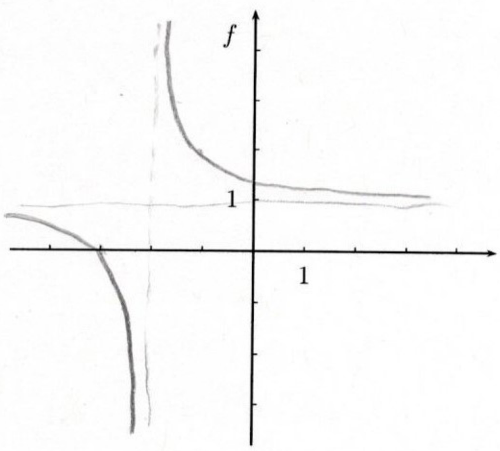
$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

b)



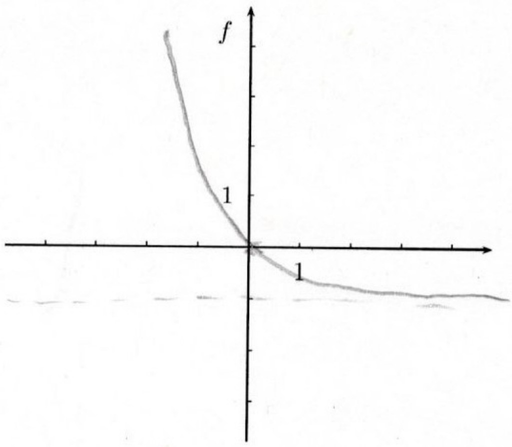
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

c)



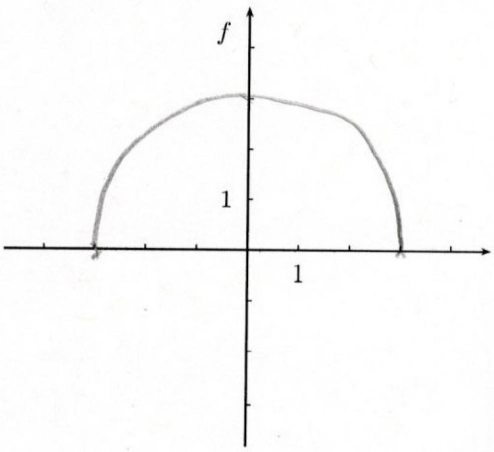
$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

d)



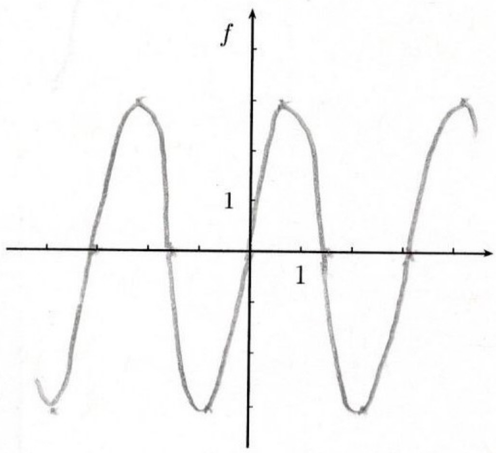
$f(x) = e^{-x} - 1$

e)



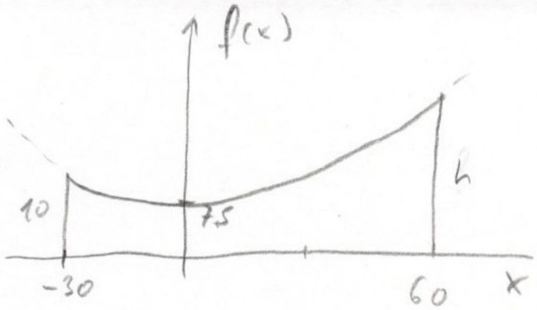
$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

f)



$f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$

Aufgabe 2



Entsprechend des KO-Systems hat die Leitung die Funktionsvorschrift

$$f(x) = a \cdot x^2 + 7{,}5$$

mit $10 \overset{!}{=} f(-30) = a \cdot 900 + 7{,}5$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}5 = a \cdot 900$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{2{,}5}{900}$$

Die gesuchte Höhe in m ist dann

$$f(60) = \frac{2{,}5}{900} \cdot 60^2 + 7{,}5$$

$$= \frac{2{,}5}{30^2} \cdot (2 \cdot 30)^2 + 7{,}5$$

$$= 2{,}5 \cdot 4 + 7{,}5$$

$$= 17{,}5$$

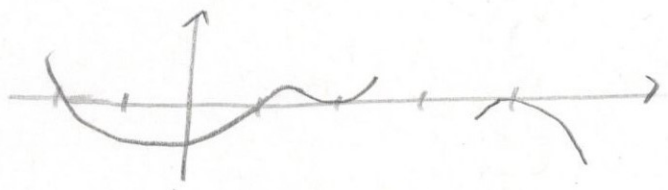
Aufgabe 3

a) $p(x) = -(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-4)^2$

b) $p(x) = \frac{1}{2\cdot(-1)\cdot(-2)^2(-4)^2}\cdot$

$= -\frac{1}{128}\cdot(x+2)(x-1)(x-2)^2\cdot(x-4)^2$

c)



Idee: zusätzliche Nullstelle bei z.B. 3:

$p(x) = -(x+2)\cdot(x-1)(x-2)^2(x-4)^2\cdot(x-3)$

d) $p(x) = \frac{-6}{2(-1)\cdot(-2)^2\cdot(-4)^2(-3)}\cdot$

$= -\frac{1}{64}(x+2)(x-1)(x-2)^2(x-4)^2(x-3)$

Aufgabe 4 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Ist der linke Ausdruck kleiner oder größer als der rechte?

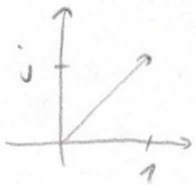
Tragen Sie das richtige Zeichen ein.

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

	„<“ oder „>“	
2^{-5}	$>$	3^{-5}
5^{-2}	$>$	5^{-3}
$\sqrt[2]{5}$	$>$	$\sqrt[3]{5}$
$\sqrt[2]{0.5}$	$<$	$\sqrt[3]{0.5}$
$0.5^{0.5}$	$>$	0.5
$\log_5 10$	$>$	$\log_6 10$
$\log_8 7$	$<$	1
$\log_{\frac{1}{2}} 2$	$>$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$

Aufgabe 5

a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$



Wegen $1+j = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$ ist

$$z^{10} = \left(\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}\right)^{10}$$

$$= 2^5 \cdot e^{j \cdot \pi \cdot \frac{10}{4}}$$

$$= 32 \cdot e^{j \cdot \pi \cdot 2{,}5} = 32 \cdot \underbrace{e^{j \cdot \pi \cdot 0{,}5}}_{=j} = 32j$$

ist $c = 0$ und $d = 32$

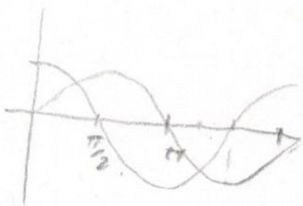
b) $\frac{1}{z} = e^{-\frac{\pi}{3} j} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$= \frac{1}{2} + j \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z^{10} = e^{\frac{10}{3}\pi j} = e^{\frac{4}{3}\pi j}$$

$$= \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + j \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$



$$= -\frac{1}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2},\ d = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 6 ($4 \times 2 = 8$ Punkte)

Welche Werte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) haben die folgenden Reihen?
(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen)

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - + \ldots =$ $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4/3} = 3/4$

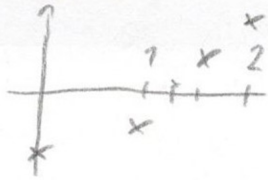
b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots =$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) - 1$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots =$ $\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

d) $1 + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \ldots =$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$

Aufgabe 7



a) $f(0) = -4 < 0$

$f(2) = 4 + 4 - 4 > 0$

$\Rightarrow$ Nst. in $[0;2]$

$f(1) = 1 + 2 - 4 < 0$

$\Rightarrow$ Nst in $[1;2]$

$f(1,5) = 1,5^2 + 3 - 4 > 0$

$\Rightarrow$ Nst in $[1; 1,5]$

$$f(1,25) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16} + \frac{10}{4} - 4 = \frac{25 + 40 - 64}{16} = \frac{1}{16} > 0$$

$\Rightarrow$ Nst in $[1; 1,25]$

b) Nst von f sind $-1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5}$.

Da die Nst. aus a) offensichtlich positiv ist, muss das $-1 + \sqrt{5}$ sein.

c) Nach n Schritten hat man die Länge $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

also $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 10^{-6}$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot 10^6 = 2^n$

$\Leftrightarrow \quad n = \log_2(2 \cdot 10^6)$

Wegen $10^3 \approx 2^{10}$ ist $\log_2(10^3) \approx 10$, also

$$\begin{aligned} \log_2(2 \cdot 10^6) &= \log_2(2) + \log_2((10^3)^2) \\ &= 1 + 2 \cdot \log_2(10^3) \\ &= 1 + 2 \cdot 10 = 21 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Es ist $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

Nach l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\text{Typ } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

ebenso:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{\text{Typ } \frac{0}{0}}{=} \ldots = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Ferner:

$$\lim_{x\to0+} f(x) \underset{\text{Typ } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Für $x\to0-$ gilt $\frac{1}{x}\to-\infty$, also $e^{\frac{1}{x}}\to0$ und damit

$$\lim_{x\to0-} f(x) = 0\cdot(0-1) = 0$$

Alternativ: Mit der Potenzreihenentwicklung ist

$$x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = x\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{x^2} + \ldots$$

Damit erhält man auch

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Aufgabe 9

a) $f(x) = \cos x \cdot e^{2x} \Rightarrow f(0) = 1 \cdot 1 = 1$

$f'(x) = -\sin x \cdot e^{2x} + \cos x \cdot e^{2x} \cdot 2 \Rightarrow f'(0) = 0 + 2 = 2$

$f''(x) = -\cos x \cdot e^{2x} - \sin x \cdot e^{2x} \cdot 2$

$- \sin x \cdot e^{2x} \cdot 2 + \cos x \cdot e^{2x} \cdot 4$

$= 3 \cos x \, e^{2x} - 4 \sin x \, e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 3 - 4 \cdot 0 = 3$

$\Rightarrow T_{2;0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2$

$= 1 + 2x + \frac{1}{2} \cdot 3x^2$

$= 1 + 2x + \frac{3}{2} x^2$

b) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - + \dots\right) \cdot \left(1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \dots\right)$

$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) \cdot \left(1 + 2x + 2x^2 + \dots\right)$

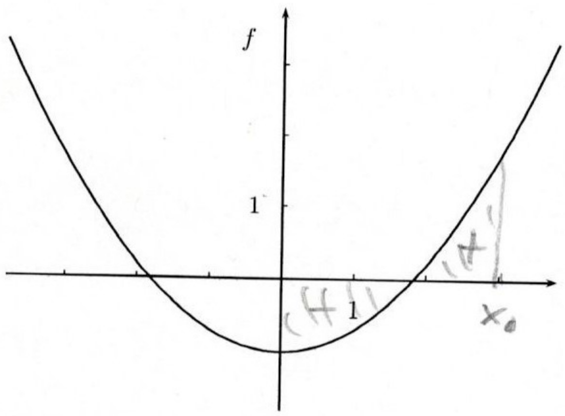
$= 1 + 2x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

$= \underbrace{1 + 2x + \frac{3}{2}x^2}_{\Rightarrow T_{2;0}(x) =} + \dots$

Aufgabe 10 (1 + 6 = 7 Punkte)

Zu einer gegebenen Funktion f wird ein $x_0 > 0$ gesucht mit $\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

a) Wo liegt ein solches x_0 ungefähr bei f entsprechend der Skizze? Markieren Sie die entsprechende Stelle.



b) Berechnen Sie ein solches x_0 bei $f(x) = x^2 - 4$.

$$0 = \int_0^{x_0} (x^2-4)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Big|_0^{x_0} = \frac{1}{3}x_0^3 - 4x_0$$

$\overset{x_0>0}{\Longleftrightarrow}$ $0 = \frac{1}{3}x_0^2 - 4$

$\Longleftrightarrow$ $12 = x_0^2$

$\overset{x_0>0}{\Longleftrightarrow}$ $x_0 = \sqrt{12}$

Aufgabe 11

Es ist $\left(\ln\left(x^2+2x+5\right)\right)' = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$

Betrachte $f(x) = \frac{4x+4}{x^2+2x+5} - \frac{6}{x^2+2x+5}$

$= 2\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{6}{(x+1)^2+4}$

$= \quad '' \quad - \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$

Es ist $\left(\arctan\frac{x+1}{2}\right)' = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{2}$

Also ist $2\cdot\ln\left(x^2+2x+5\right) - 3\cdot\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$

eine Stammfkt.

Aufgabe 12

Ein Normalenvektor zu E_1 ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Damit $E_1 = E_2$ ist, müssen die Richtungsvektoren von E_2 senkrecht zu $\vec{n}$ sein, also

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 2b + 3 - 5 = 2b - 2 \quad \Rightarrow b = 1$$

und $$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 2c + 4 \quad \Rightarrow c = -2$$

Wegen $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 0 = 1$$

ist eine Normalendarstellung von E_1

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \right\}$$

Damit $E_1 = E_2$ ist, muss $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1$ sein, also

$$2a + 2 - 5\cdot(-1) \stackrel{!}{=} 1 \iff 2a = -6 \iff a = -3$$

Alternativen:

Die Richtungsvektoren von E_2 müssen als LK der Richtungsvektoren von E_1 darstellbar sein. Damit kommt man auch auf $b = 1$ und $c = 2$.

Der Ortsvektor von E_2 muss in E_1 liegen. Damit kommt man auf $a = -3$

Aufgabe 13 (maximal 12, minimal 0 Punkte)

Welche Aussage trifft jeweils auf die in der Tabelle stehende Gleichung zu?

1) Die Gleichung ist stets eindeutig nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar.
2) Für die Gleichung gibt es stets mehrere Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
3) Es gibt Fälle, in denen die Gleichung nicht nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung eindeutig.
4) Es gibt Fälle, in denen die Gleichung nicht nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung mehrdeutig.

(Dabei sind $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, λ bzw. A jeweils fest vorgegeben.)

Tragen Sie die entsprechenden Nummern in die Tabelle ein.

Jeder richtige Eintrag zählt $+1.5$ Punkte, jeder falsche -1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

$\vec{v}_1 + \vec{x} \;=\; \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3)$	1)
$\vec{v} \cdot \vec{x} \;=\; \lambda \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v} \neq \vec{0},\ \lambda \in \mathbb{R})$	2)
$\vec{v}_1 \times \vec{x} \;=\; \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v}_1 \neq \vec{0})$	4)
$\lambda \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$	1)
$A \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A \text{ invertierbar},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$	1)
$A \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A \text{ nicht invertierbar},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$	4)
$\vec{x} \cdot \vec{x} \;=\; 1$	2)
$\vec{x} \cdot \vec{x} \;=\; 0$	1)

Aufgabe 14 $(4 + 6 = 10$ Punkte)

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

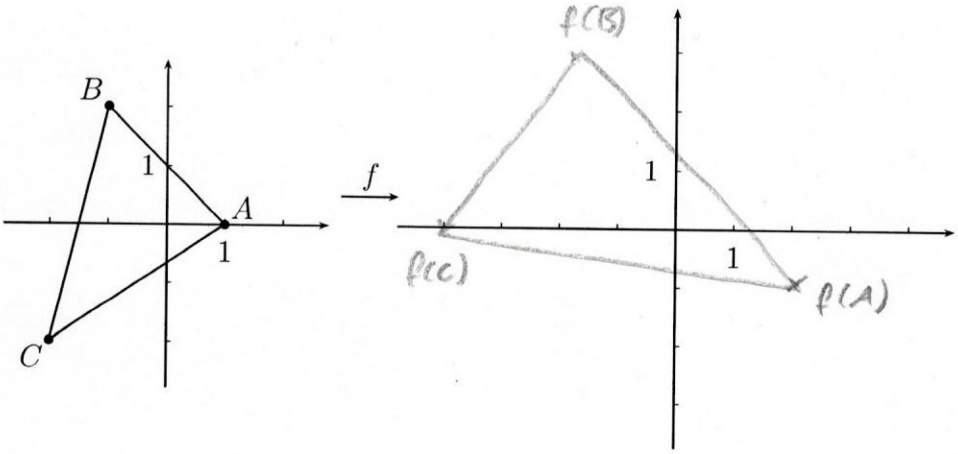
$$f(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Betrachtet wird die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$$

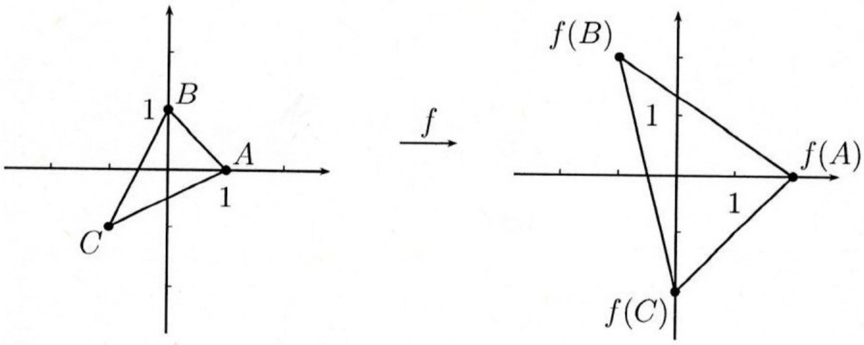
die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Ebene einen Punkt $f(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnet.

Wie wird bei dieser Abbildung das dargestellte Dreieck abgebildet? Zeichnen Sie das Bild in das rechte Koordinatensystem.



b) Gibt es eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass das unten links dargestellte Dreieck durch die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = M \cdot x$ auf das rechts dargestellte Dreieck abgebildet wird?

Falls ja: Wie lautet M? Falls nein: Warum nicht?



Wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(A) = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = f(B) = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die erste bzw. zweite Spalte von M,

also $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq f(C) \ \lightning$$

$\Rightarrow$ es gibt keine solche Matrix M!

Aufgabe 15

a) $\det A = 9 + (-2) + 0 - 0 - 2 - 3 = 2$

b) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A^T = \det A = 2$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -2 & 12 & 6 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

$\det(A^2) = (\det A)^2 = 2^2 = 4$

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +I \\ -2\cdot I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ -2\cdot II \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{2}III \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +II \\ \\ \\ \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}$