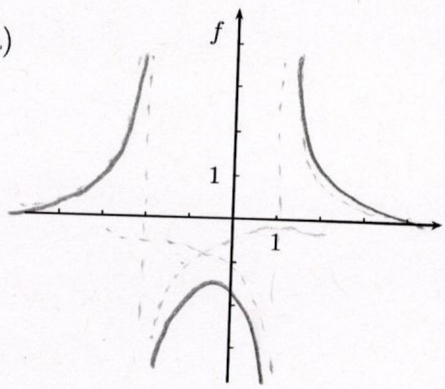
Aufgabe 1 (8 Punkte)

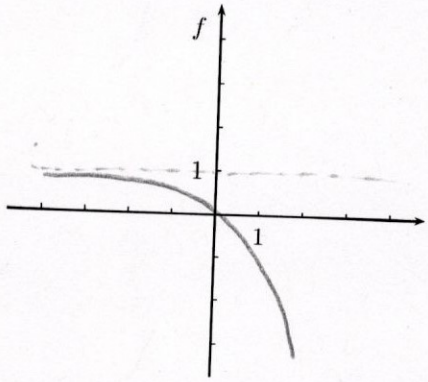
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem!

a)



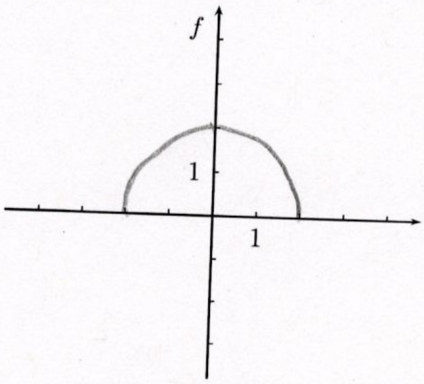
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

b)



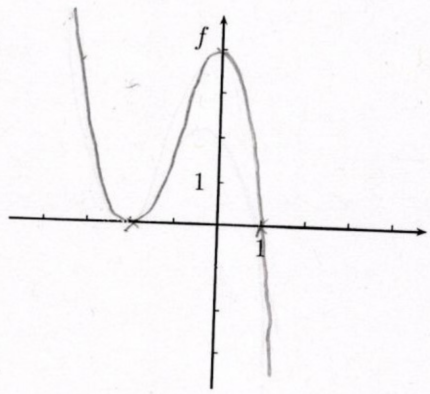
$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^x$$

c)



$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

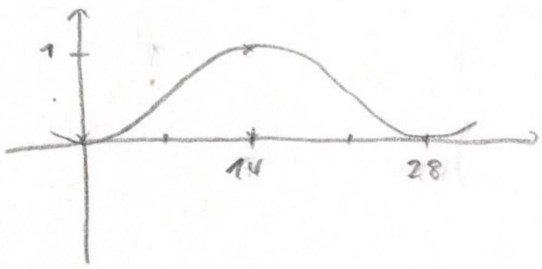
d)



$$f(x) = -(x+2)^2 \cdot (x-1)$$

Aufgabe 2

a)



$$F(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{28} \cdot 2\pi\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{14} t\right)$$

$$F'(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{14} t\right) \cdot \frac{\pi}{14}$$

b) $F(8) \approx F(7) + 1 \cdot F'(7)$

$$= \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(+\frac{1}{2} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{14} 7\right)}_{=1} \cdot \frac{\pi}{14}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{28}$$

Aufgabe 3 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Markieren Sie den richtigen (gerundeten) Zahlenwert.

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkt, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

$\sin 4 \approx$	
−1.757	
−0.757	X
0.757	
1.757	

$\cos(-1) \approx$	
−0.999	
−0.540	
0.540	X
0.999	

$\arccos 0.1 \approx$	
0.101	
0.899	
1.470	X
3.041	

$\arctan 1 \approx$	
0.785	X
1.571	
3.142	
6.283	

$\sqrt{0.4} \approx$	
0.02	
0.063	
0.2	
0.63	X

$e^{-2} \approx$	
−7.389	
−0.135	
0.135	X
1.649	

$\operatorname{ld} 20 \approx$	
1.301	
2	
2.996	
4.322	X

$\log_8 0.2 \approx$	
−1.342	
−0.774	X
0.333	
2.667	

Aufgabe 4 $(2+2+2+3+4=13$ Punkte)

Sei $z_1 = 1 - \mathrm{j}$ und $z_2 = 2 + 3\mathrm{j}$.

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$ an:

a) $z_1 + z_1^* = 2$

$z_2 \cdot z_2^* = 13$

b) $z_1 \cdot z_2 = (1-j)(2+3j) = 2-2j+3j+3 = 5+j$

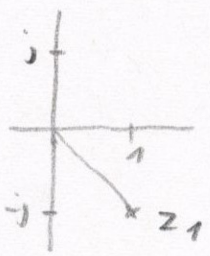
c) $z_2{}^2 = 4+12j-9 = -5+12j$

d) $\frac{z_1}{z_2} \overset{\text{s.u.}}{=} -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}j$

e) $z_1^{10} = -32j$

Tipp zu e): Überlegen Sie anschaulich, wo das Resultat in der Gaußschen Zahlenbene liegt; Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.)

$$\frac{1-j}{2+3j} = \frac{(1-j)(2-3j)}{13} = \frac{2-3j-2j-3}{13} = \frac{-1-5j}{13}$$



Aufgabe 5 (9 Punkte)

Geben Sie den Wert der folgenden Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) an oder notieren Sie „n.ex.“, falls der Grenzwert nicht existiert (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{4n-5} = \dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-n^2}{1-n^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)\cdot(n+4)}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin(x) =$ n. ex.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x+x^2}{2^x-x^3} = \infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} 0.6^k = \dfrac{1}{1-0.6} = \dfrac{1}{0.4} = \dfrac{1}{4/10} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} = 2.5$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1.4)^k =$ n. ex.

Aufgabe 6

a) $a_2 = \frac{1}{a_1} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$

$a_3 = \frac{1}{a_2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$a_4 = \frac{1}{a_3} + 1 = \frac{1}{3/2} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

$\cancel{a_5 = \frac{1}{a_4} + 1 = \frac{1}{5/3} + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}}$

b) Es gilt $a = \frac{1}{a} + 1$

$\Leftrightarrow a^2 = 1 + a$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

Da $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} < 0$ ist, alle a_n aber offensichtlich > 0 sind ist $a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$

Aufgabe 7

a) $f'(x) = \frac{y^3 \cdot (x^2+1) - x \cdot y^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{y^3 - y^3 \cdot x^2}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(y) = \frac{x}{x^2+1} \cdot 3y^2$

c) $f'(b) = \frac{1}{2\sqrt{a+\sin(3b)}} \cdot \cos(3b) \cdot 3$

Aufgabe 8

a) Es ist $f'(x) = x^2 - 4x + c$, $f''(x) = 2x - 4$

Kandidaten für Extremstellen sind Nullstellen von f':

$$0 \overset{!}{=} f'(x) = x^2 - 4x + c$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{4-c}$$

Für $c > 4$ gibt es offensichtlich keine Kandidaten,

also keine Extremstellen.

Für $c < 4$ gibt es zwei Kandidaten, die jeweils $\neq 2$

sind. Wegen $f''(x) = 2x - 4$, ist dort $f'' \neq 0$, d.h.

es gibt Extremstellen.

Für $c = 4$ ist $x = 2$ einziger Kandidat, $f''(2) = 0$.

Da f ein Polynom dritten Grades ist, ist 2 dann

Sattelstelle, d.h. f hat keine Extremstelle

$\Rightarrow$ Genau für $c \geq 4$ hat f kein Extremstelle

b)
$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \tfrac{1}{2} f''(1) \cdot (x-1)^2 \\ &= \tfrac{1}{3} + (-1)\,(x-1) + \tfrac{1}{2}\,(-2) \cdot (x-1)^2 \\ &= \tfrac{1}{3} - x + 1 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= -x^2 + x + \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$T_4(x) = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x$, da f ein Polynom

mit Grad ≤ 4 ist.

Aufgabe 9

Für den Abstand $d(x)$ von $(x; f(x))$ zu $(2;0)$ gilt

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (f(x))^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x}$$
$$= \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

Kandidaten für Extremstellen sind

$$0 \overset{!}{=} d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Da die Randstellen offensichtlich keine Min.-Stellen von $d(x)$ sind ($d(0) = 2 > d(2) = \sqrt{2}$ und $d(x) \to \infty$ für $x \to \infty$) ist $x = \frac{3}{2}$ als einziger Kandidat die gesuchte Min.stelle, d.h. der Punkt $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ hat den kleinsten Abstand zu $(2,0)$

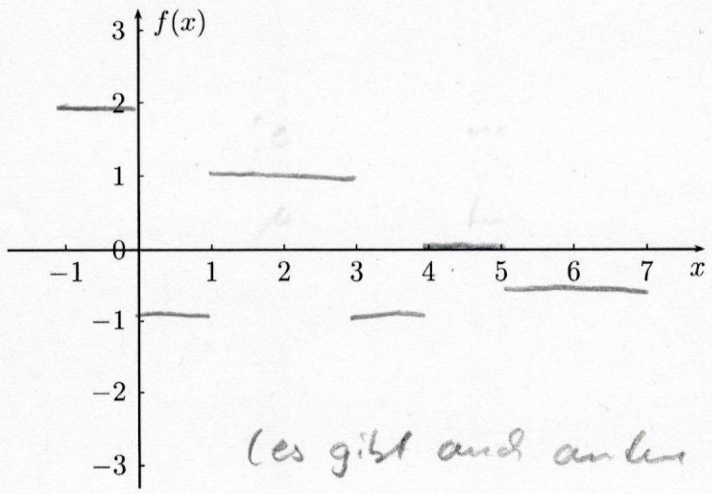
Aufgabe 10 (5 Punkte)

Skizzieren Sie in dem Koordinatensystem für $x \in [-1, 7]$ eine Funktion f so, dass für die Flächenfunktion

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt

$$F(-1) = -1, \quad F(0) = 1 \quad F(3) = 2, \quad F(5) = 1 \quad \text{und} \quad F(7) = 0.$$



(es gibt auch andere Möglichkeiten)

Aufgabe 11

a) $\int_0^\infty x \cdot e^{-2x}\, dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 1 \cdot e^{-2x}\, dx$

$= 0 - 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right)\Big|_0^\infty$

$= -\frac{1}{4} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{4}$

b) Partialbruchzerl.: $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ od. $x = -2$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{x^2+3x+2}$

$x = -1$ in Zähler: $-2 = A$

$x = -2$ " " : $-3 = B \cdot (-1) \Rightarrow B = 3$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right) dx$

$= \left(-2 \ln|x+1| + 3 \ln|x+2|\right)\Big|_0^1$

$= -2 \cdot \ln 2 + 3 \ln 3 - (-2 \underbrace{\ln 1}_{=0} + 3 \ln 2)$

$= -5 \ln 2 + 3 \ln 3$

$= -\ln 2^5 + \ln 3^3$

$= \ln \frac{27}{32}$

Aufgabe 12

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = \vec{a}$

führt zu LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +3\cdot I \\ -2\cdot I \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +5\cdot II \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :4 \end{array}$$

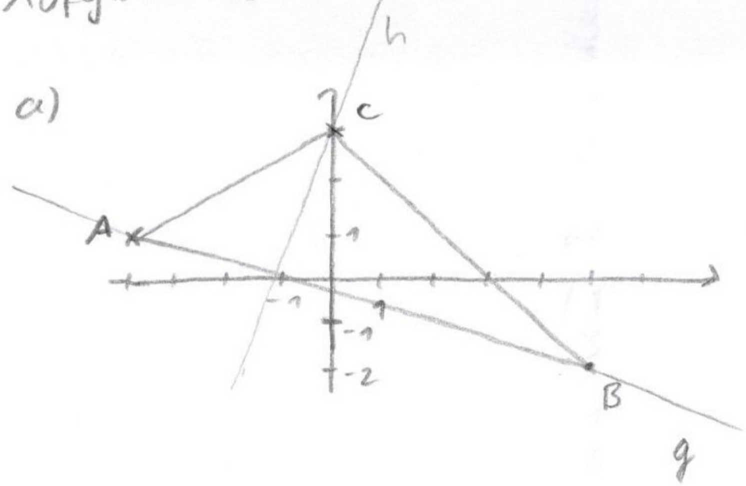
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} +III \\ +III \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot II \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \vec{a} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$

Aufgabe 13

a)



$g = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

b) Der Richtungsvektor von h ist senkrecht zu $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

also z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow h = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$

c) L ist der Schnittpunkt von g und h:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcll} 9\lambda - \mu & = & 4 & \text{I} \\ -3\lambda - 3\mu & = & 2 & \text{II} \end{array}$$

I + 3·II bringt $-10\mu = 10 \Leftrightarrow \mu = -1$.

$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $F = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$

e) $\varphi = \arccos \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|}$

$= \arccos \frac{30}{\underbrace{\sqrt{90} \cdot \sqrt{20}}_{= 3 \cdot 10 \sqrt{2}}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$

Aufgabe 14 (maximal 10, minimal 0 Punkte)

Ein Backwarenhersteller verarbeitet Grundsubstanzen $G_1, G_2, \ldots, G_k$ zu Produkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(k \neq n)$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

beschreibt die Zusammensetzung der einzelnen Produkte: Die Grundsubstanz G_i fließt mit a_{i1} Einheiten in das Produkt P_1 ein, mit a_{i2} Einheiten in das Produkt P_2 ein, usw..

Die Preise der Grundprodukte sind im Vektor $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ zusammengefasst (p_i ist der Preis einer Einheit von G_i).

Der Hersteller möchte z_k mal das Produkt P_k herstellen, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Kreuzen Sie an, durch welchen Ausdruck sich die entsprechenden Größen darstellen lassen.
Jeder richtige Eintrag zählt +2 Punkt, jeder falsche −2; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

	$A \cdot p$	$A^T \cdot p$	$A \cdot z$	$A^T \cdot z$
Warenwert der einzelnen Produkte		X		
Einheiten der Grundsubstanzen für die gesamte Produktion			X	

b) Notieren Sie bei den folgenden Ausdrücken

✓, falls der Ausdruck den Gesamtpreis der Produktion angibt,

o, falls man den Ausdruck zwar bilden kann, das Ergebnis aber nicht den Gesamtpreis der Produktion angibt,

↯, falls man den Ausdruck gar nicht bilden kann.

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

$(A \cdot z) \cdot p^T$	$(A \cdot p) \cdot z^T$	$(A \cdot z)^T \cdot p$	$(A \cdot p)^T \cdot z$	$p^T \cdot A \cdot z$	$z^T \cdot A \cdot p$
o	↯	✓	↯	✓	↯

(Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.)

Aufgabe 15

a) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\det A = -1 + 4 + 0 - 2 - (-1) - 0 = 2$

$\Rightarrow \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T)$
$= \det(A) \cdot \det(A) = 2 \cdot 2 = 4$

$\det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot \det A = 8 \cdot 2 = 16$

$\det(A^2) = \det A \cdot \det A = 2 \cdot 2 \cdot 4$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}.$