FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

17.09.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 5 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 5) in diesem Teil und alle 6 Aufgaben (Aufgabe 6 bis 11) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	12	8	15	15	17	67	55	6	122+6

Note:

Aufgabe 1 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion.

Welche Symmetrien ergeben sich bei den angegebenen Funktionen h?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „E.“ für Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	gerade	ungerade	im Allgemeinen keines von beiden	E.
$h(x) = -f(x)$				
$h(x) = -g(x)$				
$h(x) = f(x) + 2$				
$h(x) = g(x) + 2$				
$h(x) = f(x) + g(x)$				
$h(x) = f(x) \cdot g(x)$				

Aufgabe 2 (3 + 5 = 8 Punkte)

Betrachtet wird die Erwärmung eines mit Wasser gefüllten Topfs auf einer Herdplatte.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Wasser die Temperatur T_0. Die Herdplatte hat die Temperatur T_1.

a) Mit welcher der folgenden Funktionen lässt sich sinnvollerweise die Temperatur $T(t)$ des Wassers im Laufe der Zeit t modellieren? (Der Parameter k beschreibt dabei den Wärmeübergang.)

Kreuzen Sie (nur) die richtige Funktion an.

$T(t) = T_0 + T_1 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	
$T(t) = T_1 + T_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	
$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	
$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	
$T(t) = (T_1 - T_0) + T_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	
$T(t) = (T_0 - T_1) + T_1 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$	

Nutzen Sie Ihre ausgewählte Funktion für den folgenden Aufgabenteil.

(Falls Sie sich bei a) nicht entscheiden können, wählen Sie irgendeine Funktion daraus aus.)

b) Sei nun konkret $T_0 = 20°$ C und $T_1 = 100°$ C.

Nach welcher Zeit hat das Wasser die Temperatur $T = 90°$ C, wenn $k = \frac{\ln 2}{100}$ mit Einheit $\frac{1}{\text{Sekunde}}$ ist?

(Ihre Angabe soll kein „ln“ mehr enthalten.)

Aufgabe 3 (5 + 3 + 3 + 4 = 15 Punkte)

Sei $w = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{j}}$ und

$$z_k = w^k \qquad \text{sowie} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

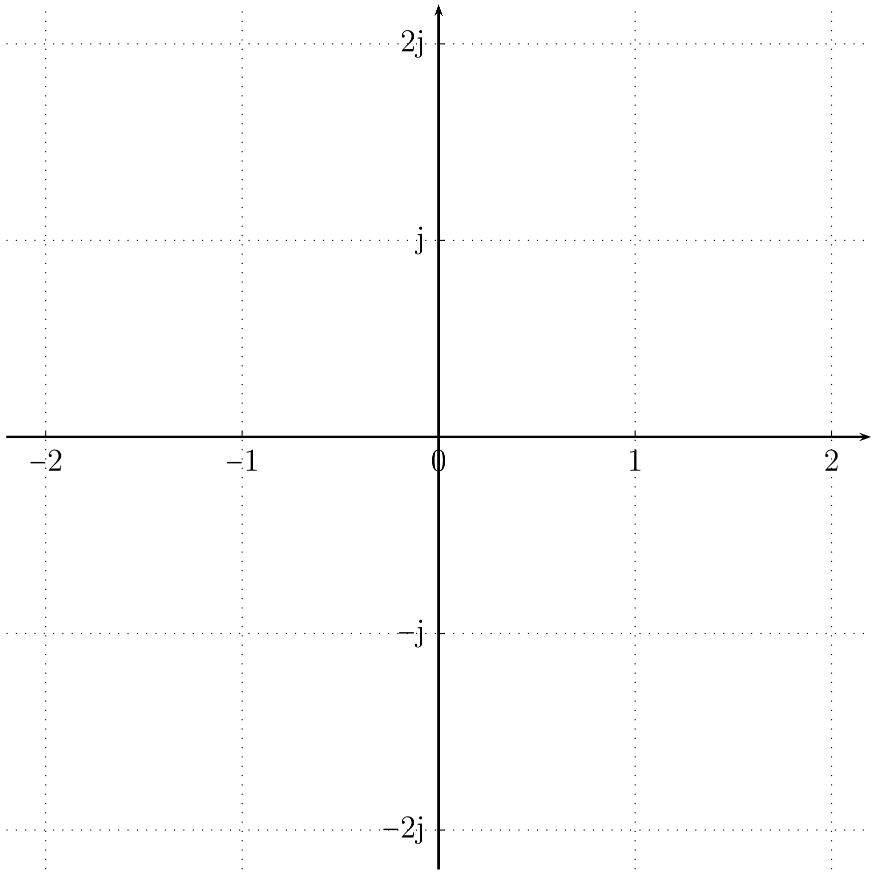
a) Geben Sie die folgenden drei Werte in kartesischer Darstellung, also in der Form $a + b\mathrm{j}$, an:

$z_1 =$ $\qquad$ $z_2 =$ $\qquad$ $z_{2024} =$

b) Geben Sie die folgenden drei Werte in kartesischer Darstellung, also in der Form $a + b\mathrm{j}$, an:

$s_0 =$ $\qquad$ $s_1 =$ $\qquad$ $s_2 =$

c) Markieren Sie im Koordinatensystem die Lage von $z_0,\ z_1,\ \ldots z_5$ sowie von $s_0,\ s_1,\ \ldots s_5$.
Schreiben Sie an Ihre Markierungen, was $z_0,\ z_1,\ \ldots z_5$ bzw. $s_0,\ s_1,\ \ldots s_5$ ist.



d) Welchen Wert hat $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$?

Aufgabe 4 (15 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Sind die angegebenen Folgen konvergent?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

a) $a_n = \cos\frac{1}{n}$.

b) $b_n = \frac{1}{\cos n}$.

c) $c_n = 0$ für alle n, die nicht durch 10 teilbar sind;
ist n Vielfaches von 10, so ist $c_n = \frac{1}{n}$.

d) $d_n = 1$ für alle n außer für Zehnerpotenzen;
ist $n = 10^k$, so ist $d_n = \frac{1}{n}$.

e) e_n ist gleich der n-ten Nachkommaziffer in der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1.4142...$, also

$$e_1 = 4, \qquad e_2 = 1, \qquad e_3 = 4, \qquad e_4 = 2, \quad \ldots.$$

f) f_n ist gleich der nach der n-ten Nachkommaziffer abgeschnittenen Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1.4142...$, also

$$f_1 = 1.4, \qquad f_2 = 1.41, \qquad f_3 = 1.414, \qquad f_4 = 1.4142, \quad \ldots.$$

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Enthaltung						
nicht konvergent						
konvergent						
mit Grenzwert						

Aufgabe 5 (11 + 4 + 2 = 17 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}.$$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, lokale Extremstellen sowie deren Art und Wendestellen von f.

b) Wie verhält sich f an den Grenzen des Definitionsbereichs und in der Nähe der Definitionslücke?

c) Skizzieren Sie den Funktionsgraf von f auf Basis der Informationen von a) und b). (Die y-Achse brauchen Sie nicht exakt zu skalieren.)

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

17.09.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	6	7	8	9	10	11	Σ_2
Max	10	5	8	12	14	6	55
Ist							

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens soll $\sqrt[3]{4}$ als Lösung von $x^3 = 4$ bestimmt werden. Als Startpunkt wird $x_0 = 1$ gewählt.

a) Führen Sie zwei Schritte der Newton-Iteration aus.

b) Zeichnen Sie die Situation mit den beiden Newton-Schritten.

   Nutzen Sie dabei die Information der Rechnung aus a).

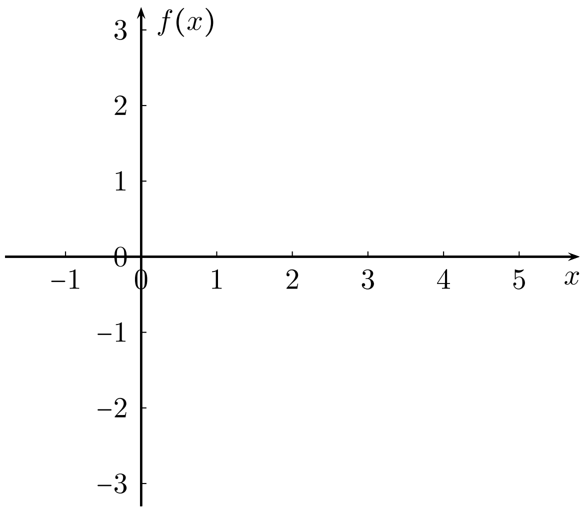
Aufgabe 7 (5 Punkte)

Skizzieren Sie in dem Koordinatensystem für $x \in [-1, 5]$ eine Funktion f so, dass für die Flächenfunktion

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

gilt

$$F(-1) = 1, \quad F(2) = 3, \quad F(3) = 0 \quad \text{und} \quad F(5) = -1.$$



Aufgabe 8 $(2+3+3=8$ Punkte$)$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin(3x)\,\mathrm{d}x \;=$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \;=$

c) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x \;=$

Aufgabe 9 (3 + 4 + 2 + 3 = 12 Punkte)

Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

an.

b) Wie groß ist der Winkel φ, den $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ einschließen?

c) Geben Sie zwei zueinander linear unabhängige Vektoren an, die senkrecht zu $\vec{v}_1$ sind.

d) Lässt sich $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination aus $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darstellen?

Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 10 (4 + 4 + 6 = 14 Punkte)

Eine Fabrik verarbeitet drei Grundsubstanzen G_1, G_2 und G_3 und produziert daraus drei Produkte P_1, P_2 und P_3. Die Zusammensetzungen sind wie folgt:

Eine Einheit P_1 besteht aus	einer Einheit G_1,	drei Einheiten G_2,	zwei Einheiten G_3.
Eine Einheit P_2 besteht aus	einer Einheit G_1,	zwei Einheiten G_2.	
Eine Einheit P_3 besteht aus		einer Einheit G_2,	einer Einheit G_3.

a) Die Kosten der Grundsubstanzen sind pro Einheit

bei G_1: 2€, bei G_2: 1€, bei G_3: 3€.

Berechnen Sie mit einer Matrix-Vektor-Multiplikation die Rohstoffpreise pro Einheit für die drei Endprodukte.

b) Berechnen Sie mit einer Matrix-Vektor-Multiplikation, wieviel Einheiten der Grundsubstanzen benötigt werden, um drei Einheiten P_1, vier Einheiten P_2 und fünf Einheiten P_3 zu produzieren.

c) Die Fabrik hat noch 3 Einheiten G_1, 9 Einheiten G_2 und 4 Einheiten G_3 auf Lager. Wieviel Einheiten der Endprodukte muss sie produzieren, um die vorhandenen Grundsubstanzen genau aufzubrauchen?

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Für welchen Wert a ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar?

(Tipp: Determinante!)