FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

16.07.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *kein Taschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 6 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 6) in diesem Teil und alle 5 Aufgaben (Aufgabe 7 bis 11) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

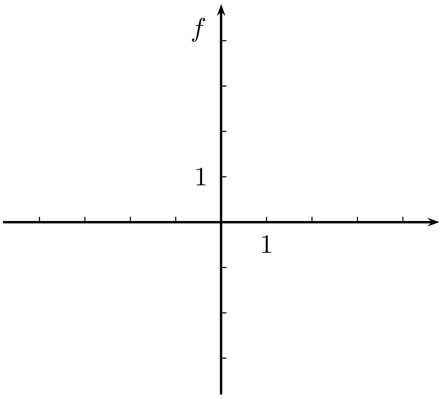
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	10	6	10	10	10	10	56	54	6	110+6

Note:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

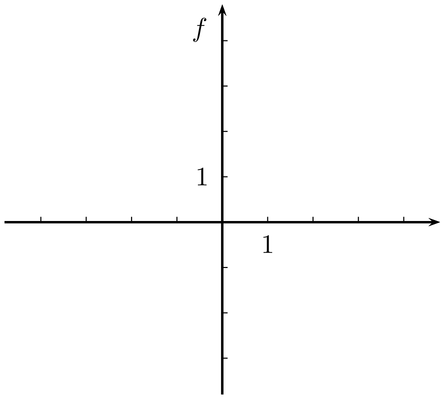
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



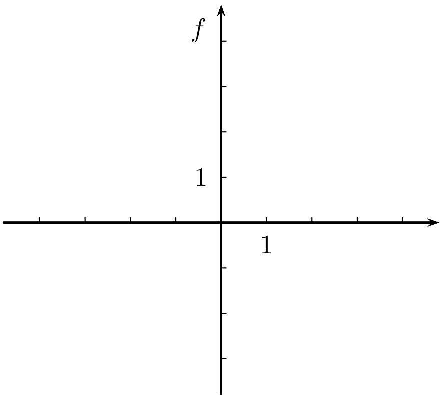
$f(x) = 2 \cdot \sin(x+1)$

b)



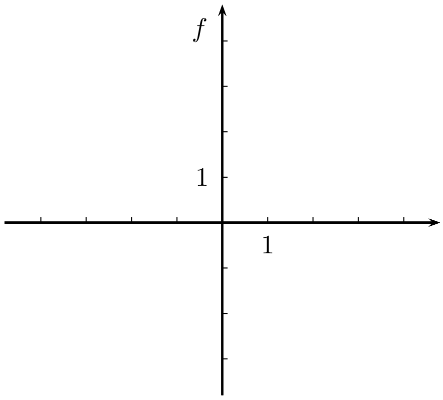
$f(x) = \cos(2x) + 1$

c)



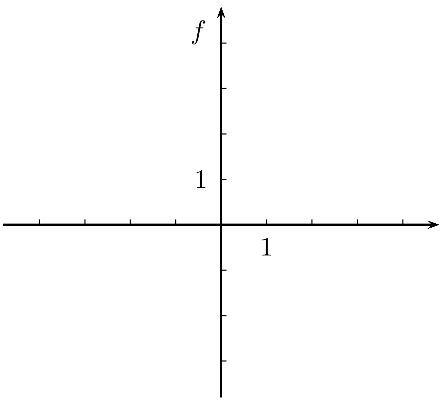
$f(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$

d)



$f(x) = \log_3 x$

e)



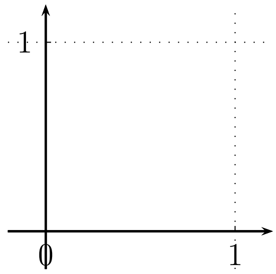
$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

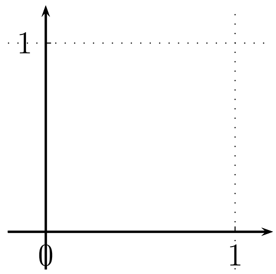
a) Zeichnen Sie in die jeweiligen Koordinatensysteme den Funktionsgraphen einer Funktion

$$f : [0, 1] \to [0, 1],$$

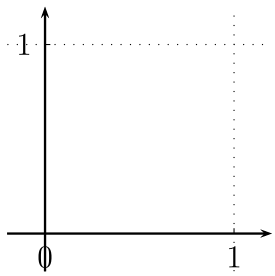
1) die surjektiv, aber nicht injektiv ist:



2) die injektiv, aber nicht surjektiv ist:



3) die weder injektiv noch surjektiv ist:



b) Geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift einer Funktion

$$f : [0, 1] \to [0, 1]$$

an (muss nicht mit Ihren Skizzen aus a) übereinstimmen),

1) die surjektiv, aber nicht injektiv ist:

$$f(x) \quad =$$

2) die injektiv, aber nicht surjektiv ist:

$$f(x) \quad =$$

3) die weder injektiv noch surjektiv ist:

$$f(x) \quad =$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Geben Sie ein quadratisches komplexes Polynom $p(z)$ an, das Nullstellen bei $z_1 = 2 + \mathrm{j}$ und $z_2 = 3 - 2\mathrm{j}$ besitzt, und für das $p(1 + 2\mathrm{j}) = 4 - 2\mathrm{j}$ gilt.

(Eine Produkt-Darstellung für p reicht.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sind die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n-1}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n = a_{n+1} - a_n.$$

Geben Sie die Werte der folgenden Grenzwerte und Summen an:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n =$

d) $\sum\limits_{n=1}^{30} b_n =$

Tipp: Teleskopsumme.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n =$

Tipp: Betrachten Sie $\sum_{n=1}^{N} b_n$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ausgegangen wird von einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einem Intervall $[a, b]$ der Länge 1, so dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist.

a) Eine Nullstelle in $[a, b]$ soll mit Hilfe des üblichen Bisektionsverfahrens mit einer Genauigkeit von 10^{-n} bestimmt werden.

   Geben Sie die (von n abhängige) ungefähre Schrittanzahl s an, die dazu nötig ist.

b) Es wird eine Modifikation des Bisektionsverfahrens vorgeschlagen:

   Das aktuelle Intervall wird in 10 gleichgroße Teilintervalle eingeteilt, an deren Randstellen jeweils die Funktion ausgewertet wird. Für den nächsten Schritt wird dann eines dieser Intervalle genommen, in dem die Funktion f das Vorzeichen wechselt.

   Wieviel Funktionsauswertungen sind bei diesem Verfahren nötig, um ausgehend von einem Intervall der Länge 1 eine Genauigkeit von 10^{-n} zu erreichen?

c) Braucht man bei der Modifikation (b)) mehr oder weniger Funktionsauswertungen als bei dem üblichen Bisektionsverfahren (a))?

   Begründen Sie Ihre Aussage.

(In der Aufgabe kann mit der Näherung $2^{10} \approx 1000$ gerechnet werden.)

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Für welche Stelle x_0 führt die Taylor-Parabel $T_{2;x_0}$ zur Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ durch den Punkt $(0,2)$?

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

16.07.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	7	8	9	10	11	Σ_2
Max	12	10	12	10	10	54
Ist						

Aufgabe 7 (4 + 8 = 12 Punkte)

Wirft man aus der Höhe h mit der Geschwindigkeit v einen Stein in einem 45°-Winkel, so beträgt die Wurfweite w

$$w = \frac{v^2}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 + \frac{hv^2}{g}}.$$

Dabei ist $g = 10 \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ die Erdbeschleunigung.

(Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

a) Geben Sie eine Abschätzung der Wurfweite (als Dezimalwert) bei $v = 10 \mathrm{m}/\mathrm{s}$ und $h = 4\,\mathrm{m}$ an.

b) Geben Sie mit Hilfe einer geeigneten Ableitung eine Abschätzung (als Dezimalwert), wieviel weiter man kommt, wenn man aus der Höhe $h = 4.2\,\mathrm{m}$ statt $h = 4\,\mathrm{m}$ abwirft, jeweils mit $v = 10 \mathrm{m}/\mathrm{s}$.

Aufgabe 8 (6 + 4 = 10 Punkte)

Betrachtet wird $\int\limits_0^{2\pi} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$.

a) Geben Sie einen Näherungswert für das Integral an mittels einer Riemannschen Zwischensumme S mit den Intervall-Zerlegungspunkten

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = 2\pi$$

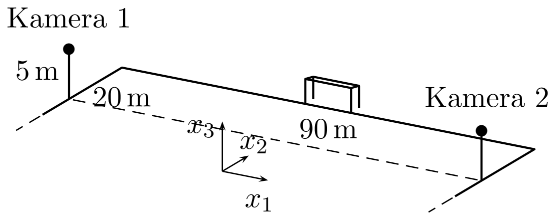
und den Zwischenstellen

$$\widehat{x_1} = \frac{\pi}{6}, \quad \widehat{x_2} = \pi, \quad \widehat{x_3} = \frac{3}{2}\pi.$$

b) Berechnen Sie den Integralwert exakt.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Bei der Fußball-Europameisterschaft gibt es zwei Kameras, die den Ball verfolgen, um ggf. zu entscheiden, ob er hinter der Torlinie ist oder nicht. Die folgende Skizze zeigt (fiktive) Positionen der Kameras und Maßangaben: Das Spielfeld ist 90 m breit, und die Kameras stehen auf 5 m hohen Pfosten an den Längsseiten 20 m von den Ecken entfernt:



Entsprechend des eingezeichneten Koordinatensystems (mit Einheiten entsprechend einem Meter) sieht Kamera 1 den Ball mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und Kamera zwei mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Befindet sich der Ball noch innerhalb des Spielfelds? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Für die Matrix A und den Vektor b gelte:

1) Der Lösungsraum zum homogenen Gleichungssystem $Ax = 0$ ist zweidimensional und enthält $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2) Das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Lösungen.

Sind dann auch

a) $x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 11 (8 + 2 = 10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie A^{-1}.

b) Geben Sie die Lösung x zu $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.