
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

25.03.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *kein Taschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 8 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 8) in diesem Teil und alle 6 Aufgaben (Aufgabe 9 bis 14) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

____

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Hier die per Mail angekündigte rein statistische Frage. Die Beantwortung ist völlig freiwillig und hat keinerlei Auswirkungen auf die Notengebung zur Klausur:

> Hintergrund: Während Corona gab es zur Mathe 1 nur digitale Angebote; die Ergebnisse waren vergleichbar, vielleicht sogar ein bisschen besser, als in den Vorjahren. Im aktuellen Durchlauf gab es im Prinzip weiterhin sämtliche digitale Angebote und zusätzlich Präsenzangebote. Mich interessiert, wie viele von Ihnen weiterhin erfolgreich allein mit den digitalen Angeboten gelernt haben.

Frage: An wieviel Prozent der Präsenz-Plenumsveranstaltungen
haben Sie teilgenommen (Prozentangabe zwischen 0 und 100%)? ______________

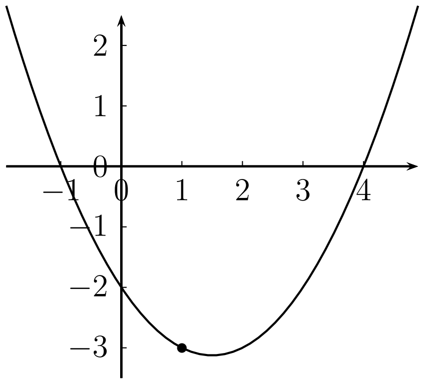
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	10	6	6	8	8	6	6	12	62	60	6	122+6

Note:

Aufgabe 1 $(2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)

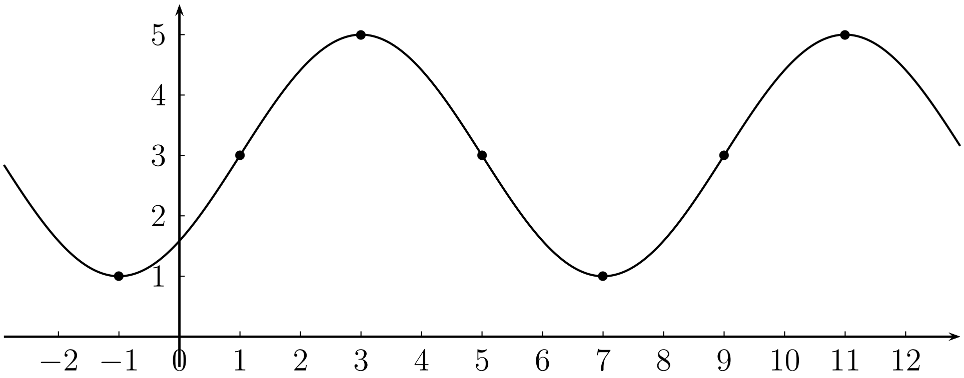
Bei den im Folgenden dargestellten Funktionsgraphen sind die Nullstellen, die Koordinaten der markierten Punkte und bei c) die Definitionslücken jeweils ganzzahlig.

a) Geben Sie eine quadratische Funktion f an, die den nebenstehenden Funktionsgraphen besitzt.



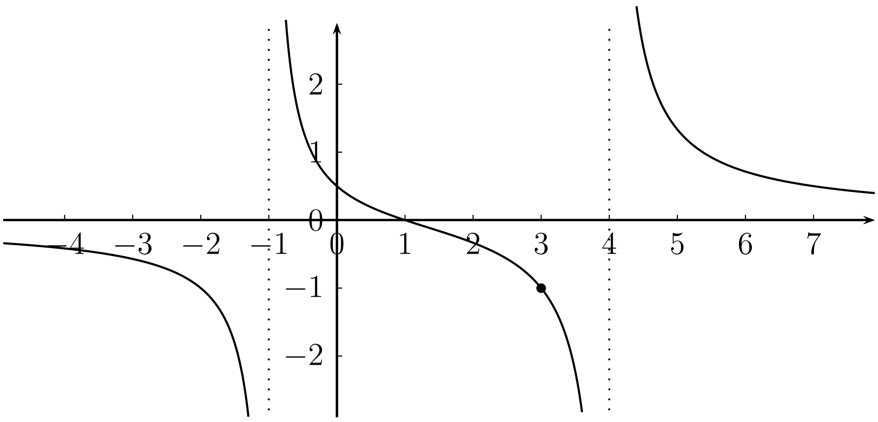
$f(x) \;=$

b) Geben Sie eine Funktion f an, die den folgenden Funktionsgraphen besitzt.



$f(x) \;=$

c) Geben Sie eine gebrochen rationale Funktion f der Form $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ an, die den folgenden Funktionsgraphen besitzt.



$f(x) \;=$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Geben Sie die Werte der folgenden Ausdrücke an:

$$\sin\left(\frac{11}{2}\pi\right) =$$

$$\arccos(-1) =$$

$$9^{0.5} =$$

$$0.5^{-2} =$$

$$\log_3 81 =$$

$$\sqrt[3]{8000} =$$

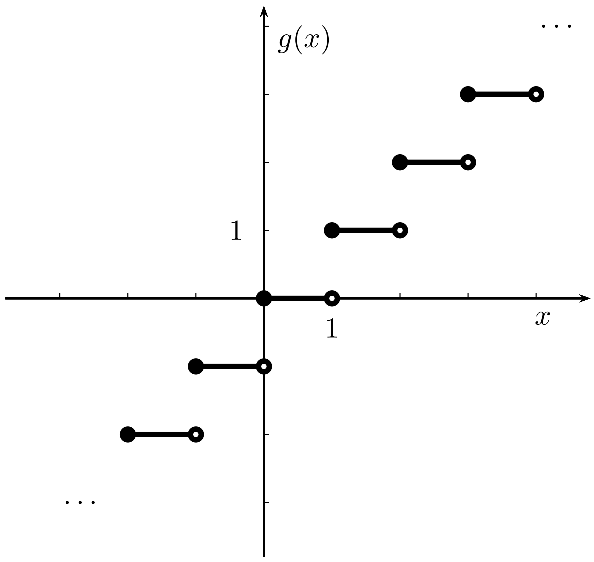
Aufgabe 3 (6 Punkte)

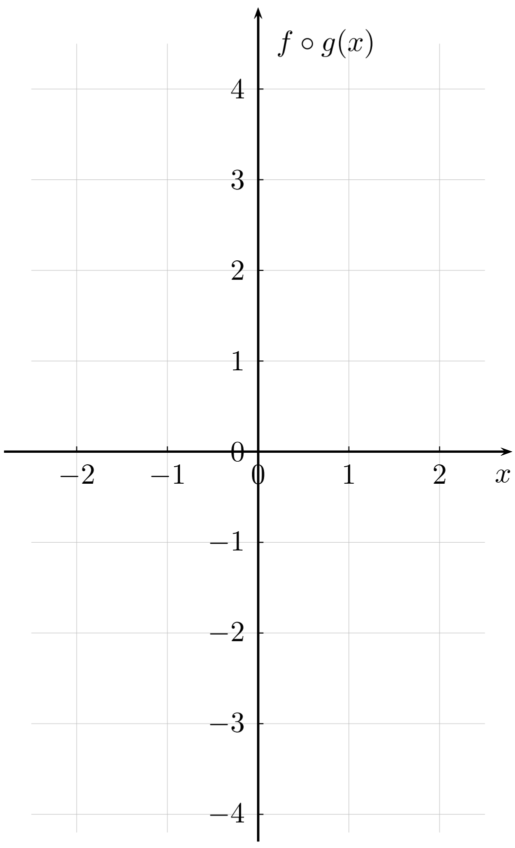
Gegeben ist die Funktion

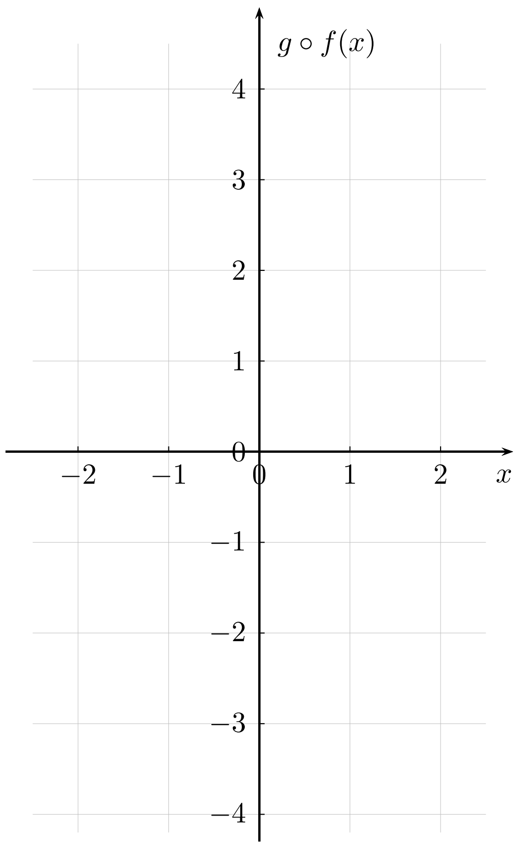
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \; = \; x^2.$$

sowie die nebenstehende Treppenfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tragen Sie in die Koordinatensysteme die Funktionsgraphen zu den Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ für $x \in [-2, 2]$ ein!







Aufgabe 4 ($4 + 4 = 8$ Punkte)

a) Markieren Sie die richtige alternative Darstellung (gerundet) der folgenden komplexen Zahlen. (Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen)

$-4 + 7\mathrm{j} =$	
$11 \cdot \mathrm{e}^{-1.05\mathrm{j}}$	
$11 \cdot \mathrm{e}^{1.47\mathrm{j}}$	
$11 \cdot \mathrm{e}^{2.09\mathrm{j}}$	
$8.06 \cdot \mathrm{e}^{-1.05\mathrm{j}}$	
$8.06 \cdot \mathrm{e}^{1.47\mathrm{j}}$	
$8.06 \cdot \mathrm{e}^{2.09\mathrm{j}}$	

$3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}} =$	
$1.5 + 2.598\mathrm{j}$	
$1.5 - 2.598\mathrm{j}$	
$-1.5 + 2.598\mathrm{j}$	
$2.598 + 1.5\mathrm{j}$	
$-2.598 + 1.5\mathrm{j}$	
$2.598 - 1.5\mathrm{j}$	

b) Berechnen Sie

b1) $(2 + \mathrm{j}) \cdot (4 - 3\mathrm{j}) \ =$

b2) $\dfrac{2 + \mathrm{j}}{4 - 3\mathrm{j}} \ =$

Aufgabe 5 $(3 + 5 = 8$ Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} \;=\; -\frac{1}{2}a_n + c$$

mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie zu $c = 2$ die Folgenglieder a_n zu $n = 1, \ldots, 4$.

b) Die Folge konvergiert für jedes c. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

   b1) Welchen Grenzwert besitzt sie für $c = 2$?

   b2) Für welchen Parameterwert c gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$?

Aufgabe 6 $(3+3=6$ Punkte)

Wie lauten die Koeffizienten a_k, $k=0,\ldots,4$, zur Potenzreihenentwicklung von f (also $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$) zu

a) $f(x)=x\cdot \mathrm{e}^x$,

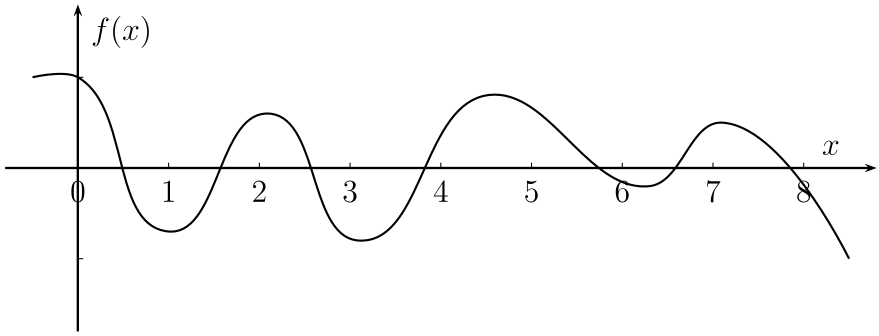
b) $f(x)=\cos(2x)$.

Tragen Sie die Koeffizienten als gekürzten Bruch in die folgende Tabelle ein.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a)					
b)					

Aufgabe 7 (2 + 4 = 6 Punkte)

a) Welches Intervall I (der Länge 0.5) erhält man, wenn man bei der dargestellten Funktion f vier Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend vom Intervall $[0, 8]$ durchführt?



$$I \;=\;$$

b) Führen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens ausgehend vom Intervall $[0, 2]$ zur Funktion

$$f(x) \;=\; 6 - 4x - x^3$$

durch und geben Sie ein Intervall der Länge 0.5 an, in dem eine Nullstelle liegt.

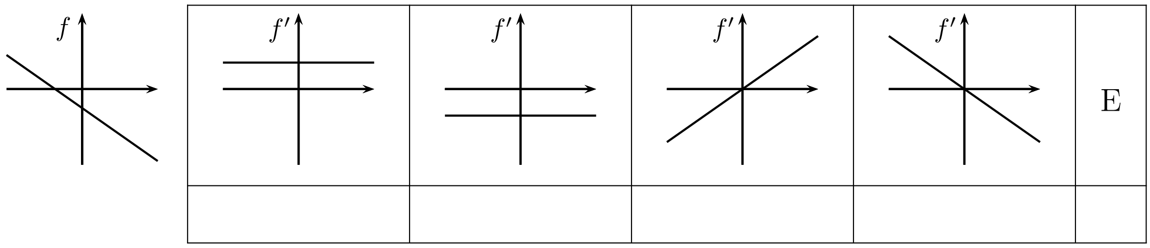
Aufgabe 8 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der rechts skizzierten Funktionen entspricht der Ableitung der links dargestellten Funktion?

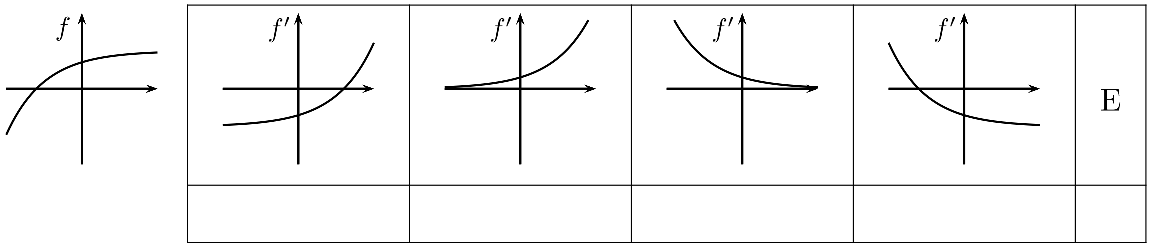
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „E“ für Enthaltung (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Hinweis: Es ist jeweils eine richtige Ableitung dargestellt.

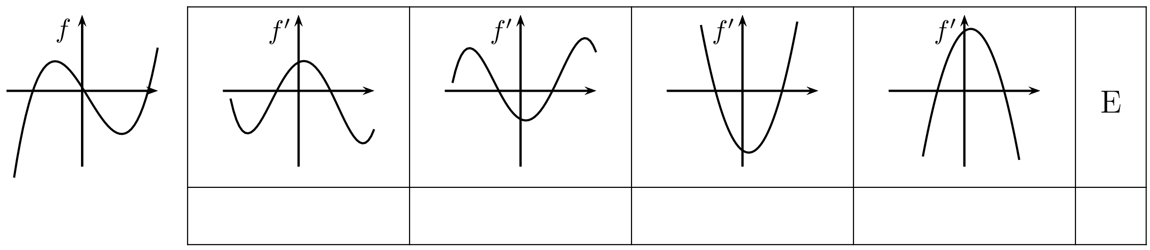
a)



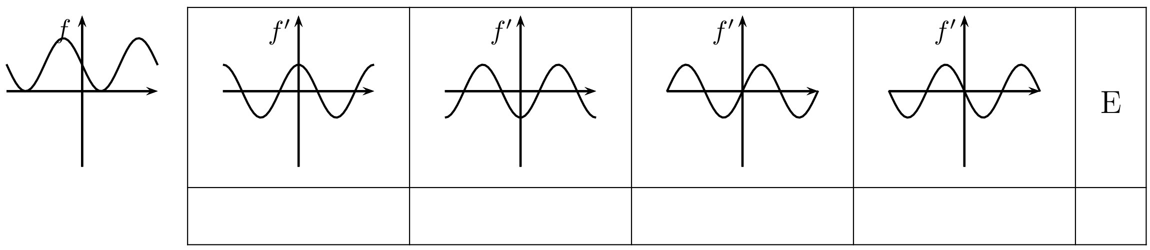
b)



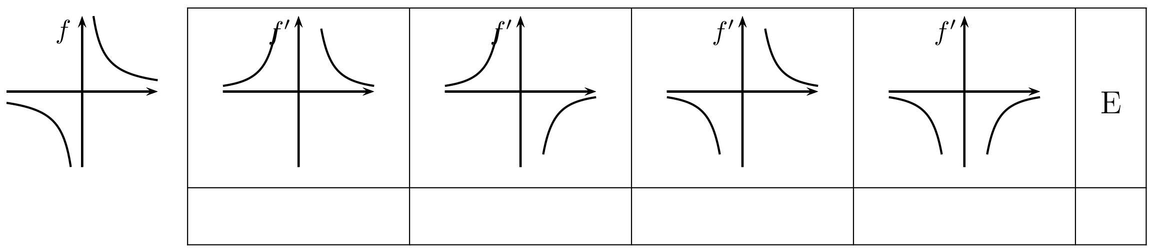
c)



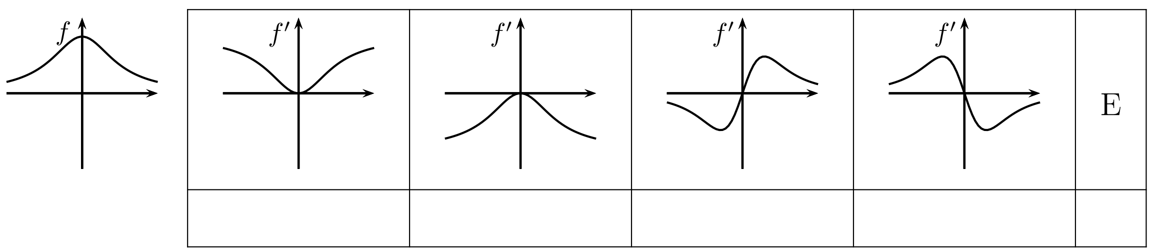
d)



e)



f)



(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

25.03.2024

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	Σ_2
Max	8	14	12	10	10	6	60
Ist							

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Die Bahnkurve bei einem Wurf mit einem 45°-Winkel zur Horizontalen aus einem Koordinatenursprung heraus wird bei Vernachlässigung des Luftwiderstands beschrieben durch

$$h(x) \;=\; x - \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2.$$

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit und $g = 10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung.

Für welche Abwurfgeschwindigkeit v_0 erreicht man eine maximale Höhe von $10\,\mathrm{m}$?

Aufgabe 10 $(3 + 6 + 5 = 14$ Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung $f'(x)$ und eine Stammfunktion $F(x)$ zu

a) $f(x) = \dfrac{1}{cx}$ mit einem Parameter $c \neq 0$.

b) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{ax}$ mit einem Parameter $a \neq 0$.

c) $f(x) = \sin^n(x) \cdot \cos(x)$ mit einer natürlichen Zahl $n > 1$.

Aufgabe 11 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (1.5 Punkte) oder Enthaltung (0.75 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	ist Basis	ist keine Basis	Enthaltung
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^2$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$			
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^3$			

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Welcher Punkt auf der Geraden

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

hat von den Punkten $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ den gleichen Abstand?

Aufgabe 13 $(3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)

In Miniland gibt es zwei Parteien: die P- und die Q-Partei.

Langjährige Wähleranalysen zeigen, dass stets 80% der letztmaligen P-Wähler bei der nächsten Wahl wieder P wählen, während 20% zu Q-Wählern werden. Bei der Q-Partei bleiben 70% der letztmaligen Wähler der Partei treu, 30% wechseln zu P.

Bei der aktuellen Wahl gibt es $p = 1000$ P-Wähler und $q = 500$ Q-Wähler.

a) Formulieren und berechnen Sie mittels einer Matrix-Vektor-Multiplikation $M \cdot \binom{p}{q}$, wieviele P- und Q-Wähler es bei der nächsten Wahl geben wird.

b) Mit welcher Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot \binom{p}{q}$ kann man das Wahlergebnis der übernächsten Wahl berechnen?

   Berechnen Sie die Matrix A konkret; die Matrix-Vektor-Multiplikation brauchen Sie nicht auszurechnen.

c) Mit welcher Matrix-Vektor-Multiplikation $B \cdot \binom{p}{q}$ kann man berechnen, wieviele P- und Q-Wähler es bei der letzten Wahl gab?

   Berechnen Sie die Matrix B konkret; die Matrix-Vektor-Multiplikation brauchen Sie nicht auszurechnen.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det A = 3$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen).

Geben Sie die folgenden Determinantenwerte an:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & 0 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\det(2 \cdot A) =$$

$$\det(A \cdot A^T) =$$

$$\det(A^{-1}) =$$