

(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)						

Fachbereich Elektrotechnik  
und Informationstechnik  
Prof. Georg Hoever

26.09.2023

## Klausur zum Fach Mathematik 1 Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *kein Taschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 09.10. statt.

Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 12./13.10. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 8 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 8) in diesem Teil und alle 6 Aufgaben (Aufgabe 9 bis 14) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

\_\_\_\_\_  
(Unterschrift)

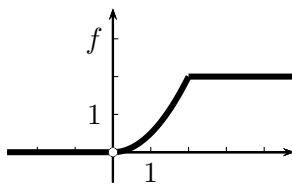
*Viel Erfolg!*

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	B.	$\Sigma$
Max	6	8	12	8	7	10	8	6	65	56	6	121+6

Note:

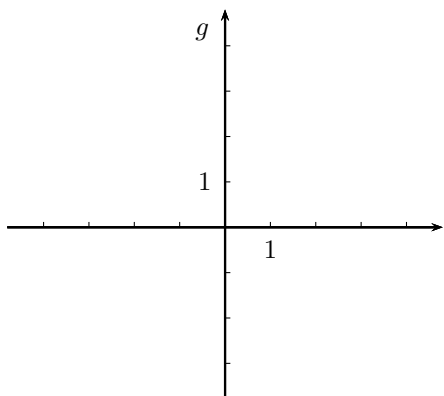
**Aufgabe 1** ( $3 \times 2 = 6$  Punkte)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitze den folgenden Funktionsgraf:



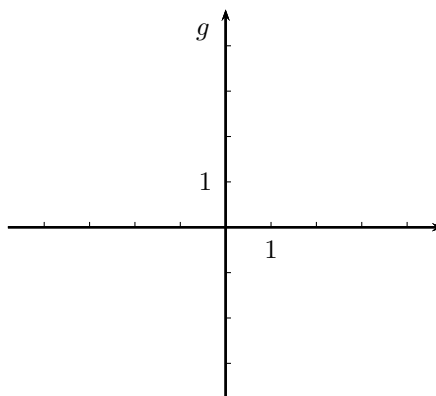
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



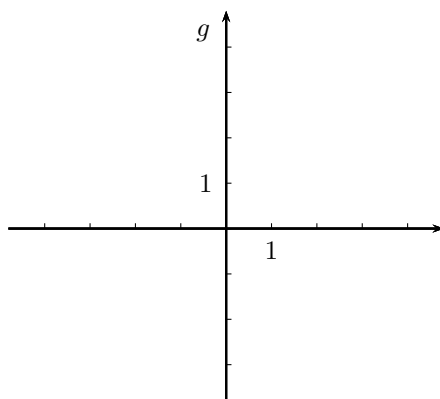
$$g(x) = 2 \cdot f(x) - 1$$

b)



$$g(x) = -f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

c)



$$g(x) = f(-x + 1)$$

**Aufgabe 2** (8 Punkte)

Das Polynom

$$p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 42x - 90$$

kann (bis auf einen Vorfaktor) vollständig in Linearfaktoren mit ganzzahligen Nullstellen zerlegt werden.

Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an und skizzieren Sie (basierend auf dieser Darstellung) grob den Kurvenverlauf!

**Aufgabe 3** (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$ ?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enth.
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$			
$\log_2 a < \log_2 b$			
$\log_a 2 < \log_b 2$			
$2^a < 2^b$			
$0.5^a < 0.5^b$			
$\sin a < \sin b$			

**Aufgabe 4** (8 Punkte)

In der folgenden Skizze sind in der Gaußschen Zahlenebene zu den Punkten  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  die folgenden Punkte markiert:

$$w_1 = z_1^*,$$

$$w_3 = z_1 + z_2$$

$$w_5 = z_1^2$$

$$w_7 = z_1 \cdot z_2$$

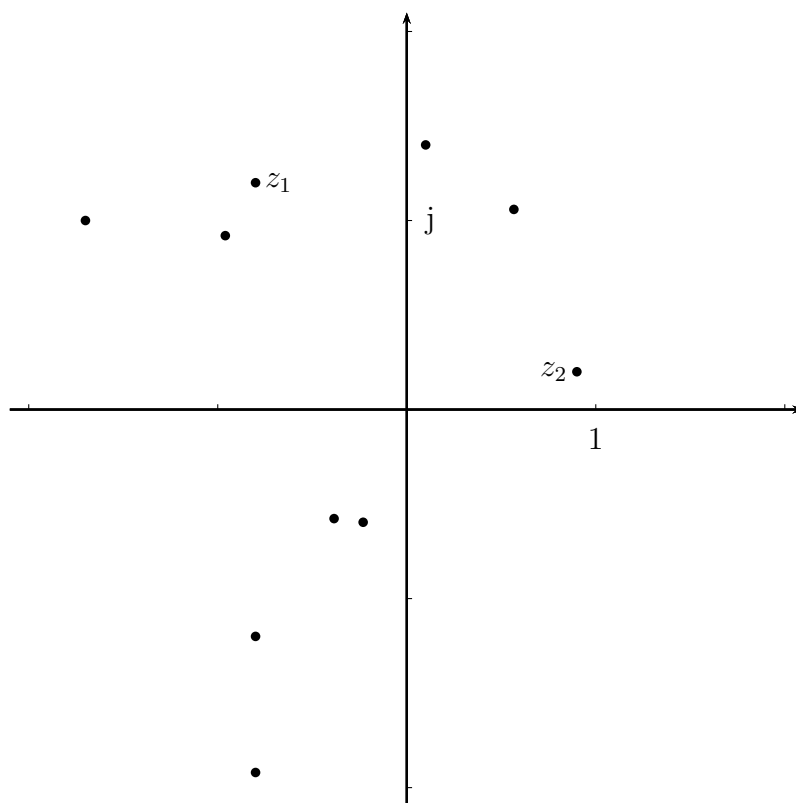
$$w_2 = \frac{1}{z_1}$$

$$w_4 = z_1 - z_2$$

$$\text{ein } w_6 \text{ mit } w_6^2 = z_1$$

$$w_8 = \frac{z_2}{z_1}.$$

Welche Punkte stellen welche Zahl dar? Schreiben Sie die richtigen Variablennamen zu den Punkten.



**Aufgabe 5** (3 + 4 = 7 Punkte)

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - 2.$$

- a) Berechnen Sie die Folgenglieder  $a_n$  zu  $n = 2, \dots, 5$ .
- b) Die Folge konvergiert. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)  
Welchen Grenzwert  $a$  besitzt sie?

**Aufgabe 6** (10 Punkte, davon bis zu 5 Enthaltungspunkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren in  $\mathbb{R}$ ?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

	konvergiert	konv. nicht	Enth.
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2 + 1)^2}{k^5 + 1}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^4}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$			

**Aufgabe 7** ( $4 + 4 = 8$  Punkte)

Sei  $f(x) = (5 - 2x)^2$ .

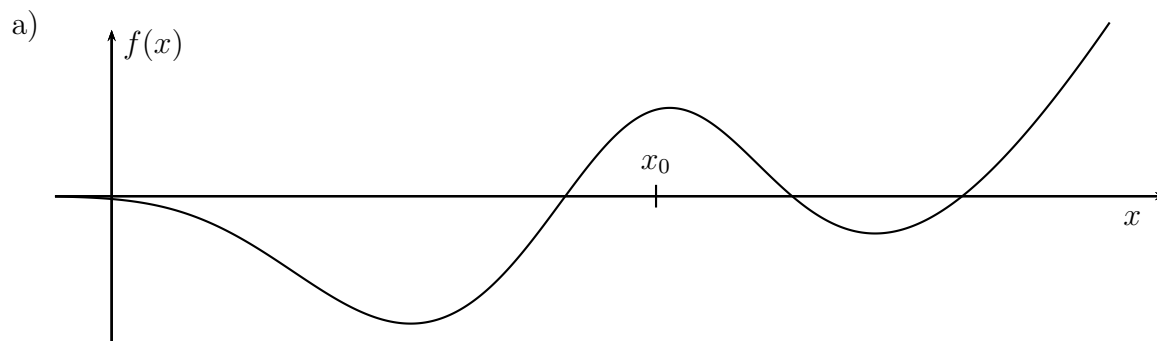
- a) Berechnen Sie  $f'(2)$  mit Hilfe der Definition als Grenzwert des Differenzenquotienten.
- b) Welchen angenäherten Wert für  $f'(2)$  erhält man bei Auswertung des Differenzenquotienten bei  $h = 0.1$ ? Geben Sie den Wert als Dezimalzahl an.



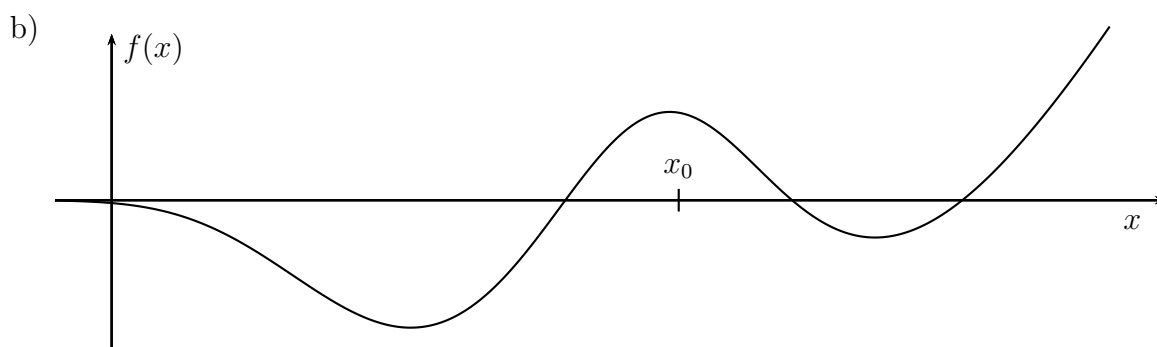
### Aufgabe 8 (6 Punkte)

Betrachtet wird das Newton-Verfahren zur abgebildeten Funktion  $f$  bei unterschiedlichen Startwerten  $x_0$ .

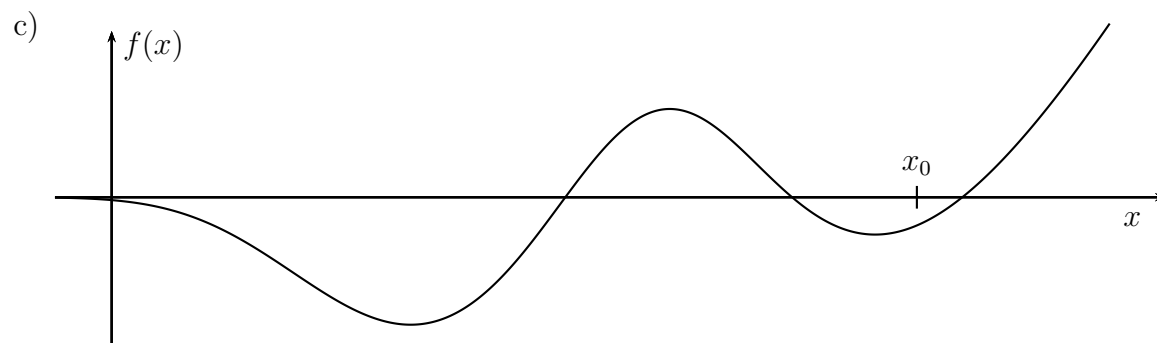
Skizzieren Sie jeweils die Lage der nächsten beiden Iterierten  $x_1$  und  $x_2$



Hinweis: Die Stelle  $x_0$  ist ein bisschen kleiner als die lokale Extremstelle.



Hinweis: Die Stelle  $x_0$  ist ein bisschen größer als die lokale Extremstelle.



--	--	--	--	--	--	--	--	--

(Name)

(Vorname)

(Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik  
und Informationstechnik

26.09.2023

Prof. Georg Hoever

## Klausur zum Fach Mathematik 1 Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	$\Sigma_2$
Max	14	9	9	6	10	8	56
Ist							

**Aufgabe 9** (2 + 4 + 8 = 14 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(5x) \, dx$

b)  $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-3x} \, dx$

c)  $\int_0^1 \frac{x+7}{x^2-x-2} \, dx$

**Aufgabe 10** (9 Punkte)

Für welchen Wert von  $c$  wird der Flächeninhalt des von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Parallelogramms minimal?

**Aufgabe 11** (9 Punkte)

Sei  $V$  der Vektorraum aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wie kann man die angegebenen Funktionen  $f$  als Linearkombination der jeweiligen Funktionen  $v_k$  darstellen?

a)  $f(x) = x^2 + 2$  als Linearkombination von

$$v_1(x) = 1 + x, \quad v_2(x) = x + x^2 \quad \text{und} \quad v_3(x) = x^2.$$

b)  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$  als Linearkombination von

$$v_1(x) = \sin x \quad \text{und} \quad v_2(x) = \cos x.$$

c)  $f(x) = \sinh x$  als Linearkombination von

$$v_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_2(x) = e^{-x}.$$

d)  $f(x) = e^{x+3}$  als Linearkombination von

$$v_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad v_2(x) = e^{-x}.$$

**Aufgabe 12** (6 Punkte)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix mit den Spalten  $a_i \in \mathbb{R}^n$  und  $B = A^T \cdot A$ .

Welche Folgerungen gelten allgemein?

Tragen Sie jeweils den Folgerungspfeil in der richtigen Richtung bzw. im Falle der Äquivalenz den Äquivalenzpfeil bzw. im Falle, dass keine Folgerung gilt „ $\times$ “ ein.

	$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ oder $\times$	
Die $a_i$ sind zueinander orthogonal		Die Diagonale von $B$ besteht aus lauter Einsen
Die $a_i$ sind zueinander orthogonal		$B$ ist eine Diagonalmatrix
Die $a_i$ sind zueinander orthogonal		$B$ ist die Einheitsmatrix
Die $a_i$ haben die Länge 1		Die Diagonale von $B$ besteht aus lauter Einsen
Die $a_i$ haben die Länge 1		$B$ ist eine Diagonalmatrix
Die $a_i$ haben die Länge 1		$B$ ist die Einheitsmatrix

**Aufgabe 13** (10 Punkte)

Eine Chemiefirma produziert standardmäßig Flüssigkeiten, die drei Grundstoffe in verschiedenen Mischungsverhältnissen besitzen:

	Stoff A	Stoff B	Stoff C
Flüssigkeit 1	10%	20%	70%
Flüssigkeit 2	20%	50%	30%
Flüssigkeit 3	50%	40%	10%

Nun will ein Kunde 1000 Liter einer Flüssigkeit mit dem Mischungsverhältnis

20% Stoff A, 40% Stoff B, 40% Stoff C.

Wieviel der einzelnen Flüssigkeiten muss die Firma nehmen, um das gewünschte Mischungsverhältnis zu erreichen?

**Aufgabe 14** (8 Punkte)

Nutzen Sie die Cramersche Regel, um in Abhängigkeit vom Parameter  $a \in \mathbb{R}$  den Wert der zweiten Komponente  $x_2$  für die Lösung  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zu bestimmen.