(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)						

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

13.03.2023

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 7 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 7) in diesem Teil und alle 7 Aufgaben (Aufgabe 8 bis 14) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

____

(Unterschrift)

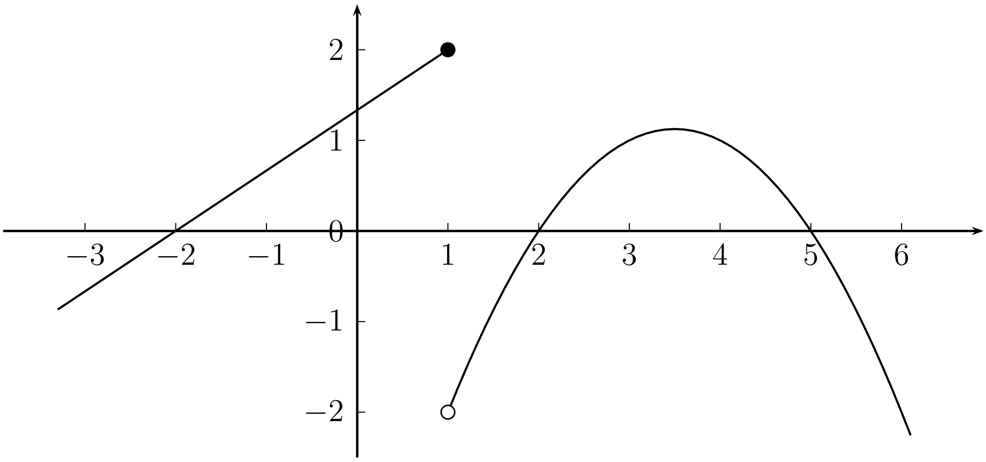
Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	4	13	7	11	10	7	9	61	63	6	124+6

Note:

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die in der Skizze unten dargestellte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besteht aus einem Geraden- und einem Parabelstück.



Geben Sie eine Funktionsvorschrift für f an.

Hinweis: Die Nullstellen haben ganzzahlige x-Koordinaten, und die Endpunkte bei $x = 1$ des Geraden- und Parabel-Stücks haben ganzzahlige y-Koordinaten.

Aufgabe 2 (13 Punkte, davon bis zu 6,5 Enthaltungspunkte)

Markieren Sie, ob die jeweiligen Ausrücke dem Ausdruck in den Tabellen oben entsprechen (Spalte ✓) oder nicht (Spalte $\lightning$).

Hinweis: Es können mehrere richtige Darstellungen vorliegen.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (1 Punkt) oder „Enthaltung“ (0,5 Punkte) an. Sie brauchen Ihre Angabe nicht zu begründen.

Hinweis: Es können mehrere richtige Darstellungen vorliegen.

$\ln 16 =$	✓	$\lightning$	Enth.
$2 \cdot \ln 8$			
$2 \cdot \ln 4$			
$\ln 2 + \ln 8$			
$\dfrac{\mathrm{ld}\ 16}{\mathrm{ld}\ \mathrm{e}}$			

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$	✓	$\lightning$	Enth.
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$			
$2^{-\frac{1}{2}}$			
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$			
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$			

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$	✓	$\lightning$	Enth.
$1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$			
$\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$			
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$			
$\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})$			
$\cos(\frac{\pi}{6})$			

Aufgabe 3 $(4 + 3 = 7$ Punkte)

a) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{(x-3)^2} - 1$

   a1) injektiv?

   a2) surjektiv?

   Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Geben Sie möglichst große Bereiche $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass die Funktion

$$f : D \to W, \quad f(x) = \mathrm{e}^{(x-3)^2} - 1$$

   bijektiv ist.

Aufgabe 4 $(3+5+3=11$ Punkte)

a) Geben Sie zu den beiden komplexen Zahlen

$$z_1 \;=\; 3+2\mathrm{j} \qquad \text{und} \qquad z_2 \;=\; 4\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{j}}$$

jeweils die Quadrate ${z_1}^2$ und ${z_2}^2$ an (egal ob in kartesischen oder Polar-Koordinaten).

b) Geben Sie die Lösungen z zu

$$z^2 \;=\; -8-6\mathrm{j}$$

in kartesischen Koordinaten an.

c) Geben Sie die Lösungen z zu

$$z^2 \;=\; 4\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{5}\mathrm{j}}$$

in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 5 $(2+4+2+2=10$ Punkte)

Die Folgenglieder a_k seien definiert durch

$$a_k \;=\; \frac{k}{3^k} - \frac{k+1}{3^{k+1}}.$$

a) Vereinfachen Sie die Darstellung von a_k.

b) Geben Sie a_1, a_2 und a_3 sowie die ersten drei Partialsummen s_1, s_2 und s_3 von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ an.

c) Geben Sie eine explizite Formel für die n-te Partialsumme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ an.

(Tipp: Hier ist die ursprüngliche Darstellung der a_k hilfreich.)

d) Welchen Reihenwert besitzt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$?

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Geben Sie jeweils Funktionen an, die die angegebenen Grenzwertaussagen erfüllen.

(Beachten Sie, dass bei c) x nicht gegen ∞ sondern gegen 1 streben soll.)

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = -\infty.$

$f(x) \;=$ $\qquad\qquad$ $g(x) \;=$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 3.$

$f(x) \;=$ $\qquad\qquad$ $g(x) \;=$

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0.$

$f(x) \;=$ $\qquad\qquad$ $g(x) \;=$

Aufgabe 7 $(2+2+2+3=9$ Punkte)

Geben Sie jeweils die 2023te-Ableitung $f^{(2023)}$ an zu

a) $f(x) \;=\; x^{2023}$

b) $f(x) \;=\; \sin(x)$

c) $f(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}$

d) $f(x) \;=\; x \cdot \mathrm{e}^{x}.$

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

13.03.2023

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	8	9	10	11	12	13	14	Σ_2
Max	8	6	10	8	8	15	8	63
Ist								

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Eine Großbäckerei benötigt pro Jahr 400 Tonnen Mehl, die es sich in mehreren Lieferungen liefern lassen möchte.

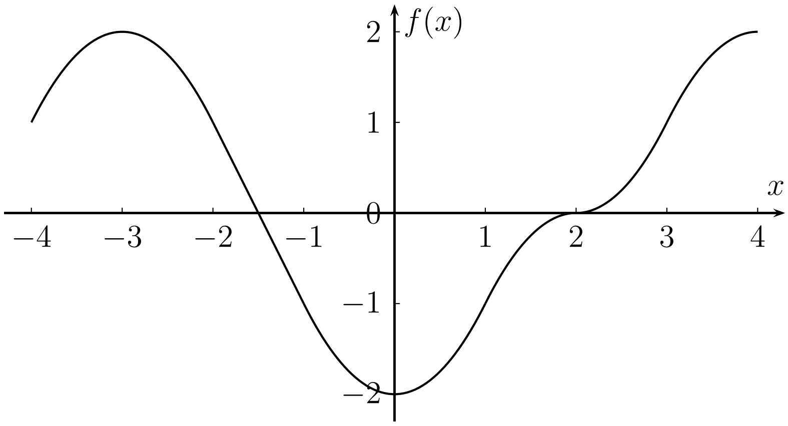
Unabhängig vom Umfang der Lieferung fallen pro Lieferung Lieferkosten in Höhe von 500 € an. Die Bäckerei kalkuliert mit Lagerhaltungskosten von 20 € pro angelieferter Tonne und Jahr.

Welchen Umfang sollten die einzelnen Lieferungen haben, damit die jährlichen Liefer- und Lagerkosten in Summe möglichst gering sind?

Aufgabe 9 ($2 + 2 + 2 = 6$ Punkte)

Das folgende Bild zeigt den Funktionsgraf zu einer Funktion $f : [-4; 4] \to \mathbb{R}$.

(Die Extremstellen sind ganzzahlig, und bei ganzzahligen x-Werten ist $f(x)$ auch ganzzahlig.)



a) Welchen Wert hat die Riemannsche Zwischensumme S zu $\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bei einer Zerlegung

$$x_0 = -4, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 4$$

und den Zwischenstellen

$$\widehat{x_1} = -3, \quad \widehat{x_2} = -2, \quad \widehat{x_3} = 1, \quad \widehat{x_4} = 4?$$

b) Skizzieren Sie in dem Bild oben die Situation aus a).

c) Geben Sie an, bei welchen Zwischenstellen zu der Zerlegung aus a) die Riemannsche Zwischensumme gleich der Untersumme ist:

$\widehat{x_1} \;=$ $\qquad\qquad$ $\widehat{x_2} \;=$ $\qquad\qquad$ $\widehat{x_3} \;=$ $\qquad\qquad$ $\widehat{x_4} \;=$

Aufgabe 10 $(2 + 4 + 4 = 10$ Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion zu

a) $f(x) = \sin(3x + 1)$,

b) $f(x) = x \cdot \sin(3x + 1)$,

c) $f(x) = x \cdot \sin(3x^2 + 1)$.

Aufgabe 11 (3 + 5 = 8 Punkte)

Betrachtet werden die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Für welchen Parameter $s \in \mathbb{R}$ kann man den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} s \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ an, der senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und die Länge 5 hat.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Wie kann man mit Hilfe einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ die Projektion eines Punktes

$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ auf die (y, z)-Ebene E_{yz} in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ darstellen?

Aufgabe 13 (15 Punkte, davon bis zu 7,5 Enthaltungspunkte)

Sind die angegebenen Lösungsmengen L für die beschriebenen linearen Gleichungssysteme möglich, d.h., gibt es lineare Gleichungssysteme, deren Lösungsmenge die angegebene Struktur haben?

Tragen Sie in das entsprechende Tabellenfeld jeweils „ja", „nein" oder „E." (Enthaltung) ein.

Für jede richtige Angabe gibt es 1 Punkt, für „Enthaltung" jeweils 0,5 Punkte. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	homogenes LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen	inhomogenes LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen	inhomogenes LGS mit 3 Gleichungen und 5 Variablen
L ist leer.			
L enthält genau ein Element.			
L enthält genau zwei Elemente.			
L ist eine eindimensionale Gerade			
L ist eine zweidimensionale Ebene			

Aufgabe 14 (8 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$