
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

13.09.2022

Klausur zum Fach Mathematik 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 11 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Max	18	8	11	10	14	11	12

Aufgabe	8	9	10	11	Σ_0	B.	Σ
Max	6	9	12	8	119	6	125

Note:

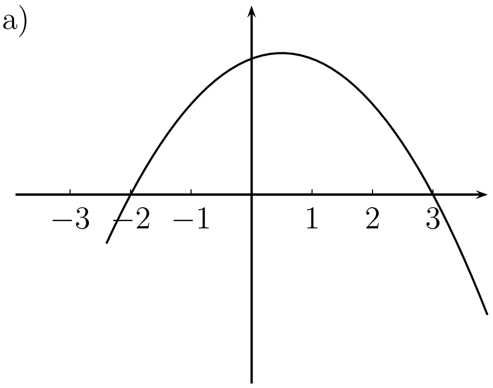
Aufgabe 1 (18 Punkte, davon bis zu 9 Enthaltungspunkte)

Welche Funktion erzeugt den nebenstehenden Funktionsgraf?

(Die Skalierungen der y-Achse sind unterschiedlich.)

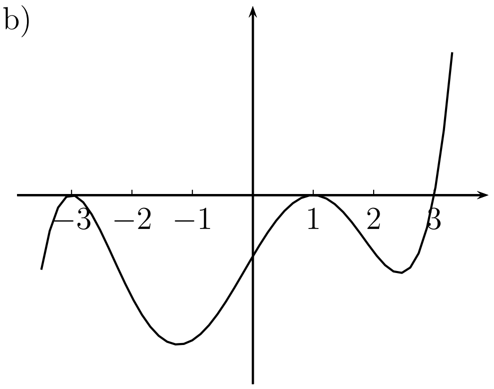
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (3 Punkte) oder „Enthaltung“ (1,5 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

a)



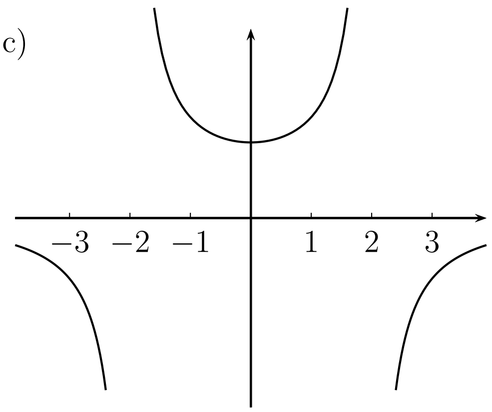
$f(x) = \ \ x^2 + x + 6$	
$f(x) = -x^2 + x + 6$	
$f(x) = \ \ x^2 + x - 6$	
$f(x) = -x^2 + x - 6$	
Enthaltung	

b)



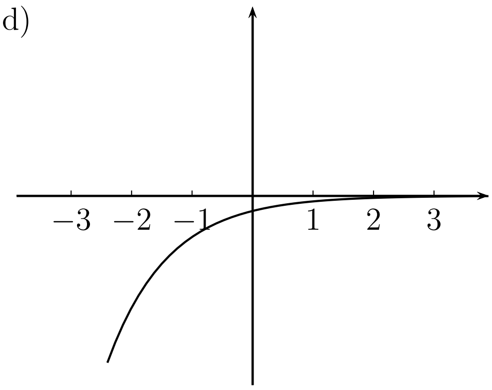
$f(x) = (x+3)^2(x+1)^2(x-3)$	
$f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-3)^2$	
$f(x) = (x+3)^2(x-1)^2(x-3)$	
$f(x) = (x+3)(x-1)^2(x-3)^2$	
Enthaltung	

c)



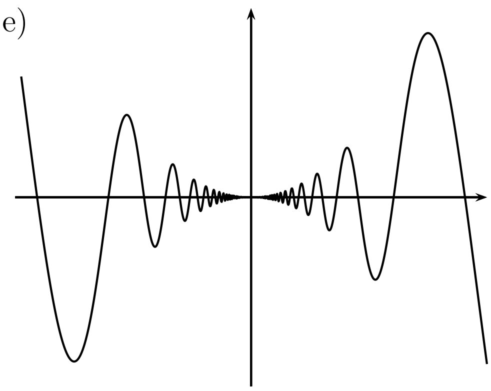
$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$	
$f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$	
$f(x) = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$	
$f(x) = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$	
Enthaltung	

d)



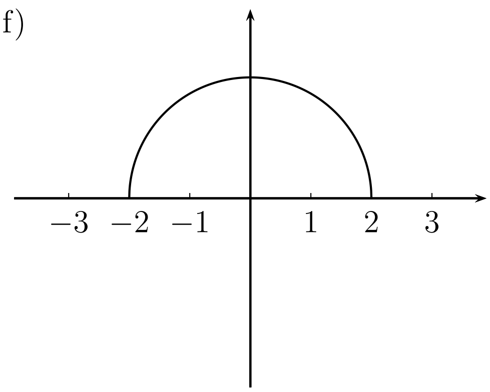
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$	
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	
$f(x) = -\mathrm{e}^{x}$	
$f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$	
Enthaltung	

e)



$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \sin x$	
$f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin x^2$	
$f(x) = x \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$	
$f(x) = x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}$	
Enthaltung	

f)



$f(x) = \frac{1}{x^2+4}$	
$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$	
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	
$f(x) = \sin x + \cos x$	
Enthaltung	

Aufgabe 2 (8 Punkte)

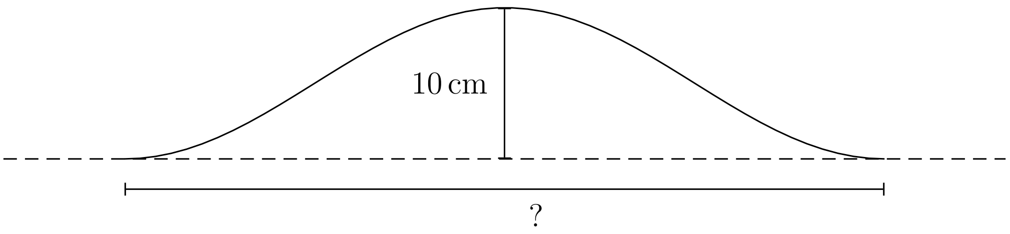
Geben Sie alle Werte $x \in [0, 2\pi]$ an, für die gilt

$$\sin^2 x - \cos x \;=\; \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Zur Verkehrsberuhigung soll eine 10 cm hohe Cosinus-förmige Bodenwelle auf eine Straße gebaut werden. Aus sicherheitstechnischen Gründen darf die maximale Steigung gleich 0.1 sein.

Wie lang muss die Bodenwelle sein?

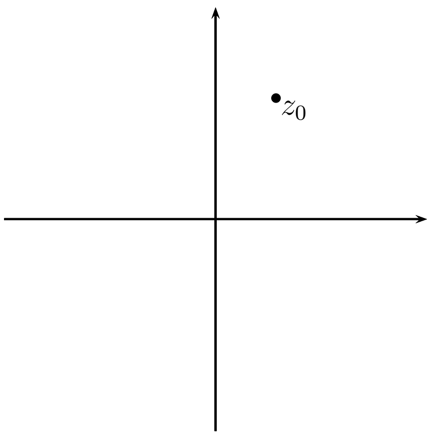


Aufgabe 4 $(6 + 4 = 10$ Punkte)

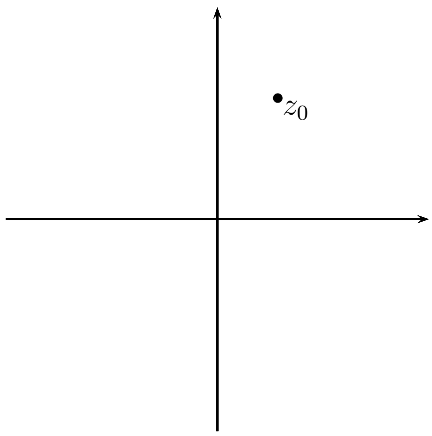
a) Zeichnen Sie zu dem in den Gaußschen Zahlenebenen markierten

$$z_0 \;=\; a_0 + b_0\mathrm{j} \;=\; r_0 \cdot \mathrm{e}^{\varphi_0 \mathrm{j}} \in \mathbb{C}$$

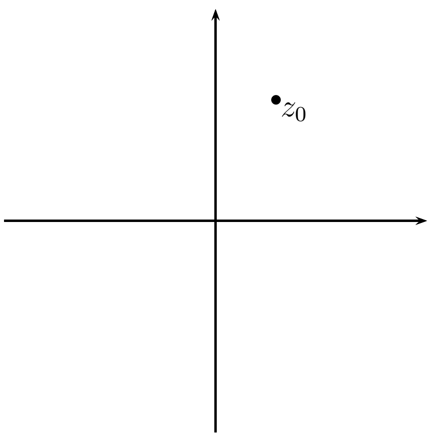
jeweils die angegebene Menge ein.



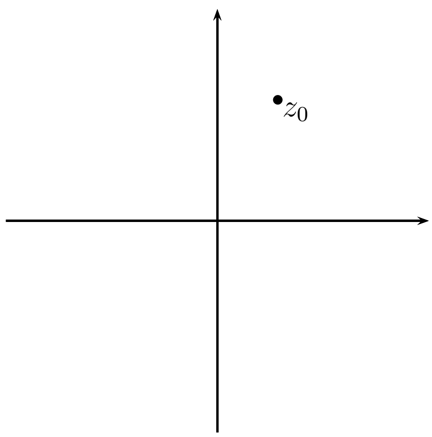
$M_1 = \{a + b_0\mathrm{j} \,|\, a \in \mathbb{R}\}$



$M_2 = \{a_0 + b\mathrm{j} \,|\, b \in \mathbb{R}\}$

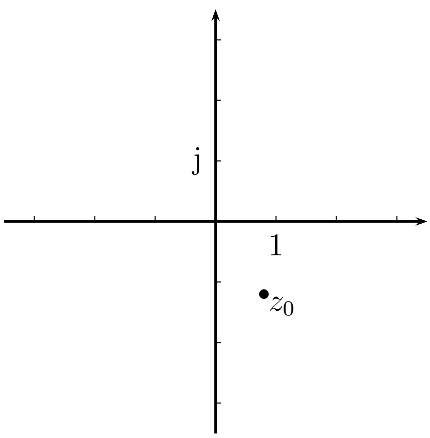


$M_3 = \{r \cdot \mathrm{e}^{\varphi_0 \mathrm{j}} \,|\, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$

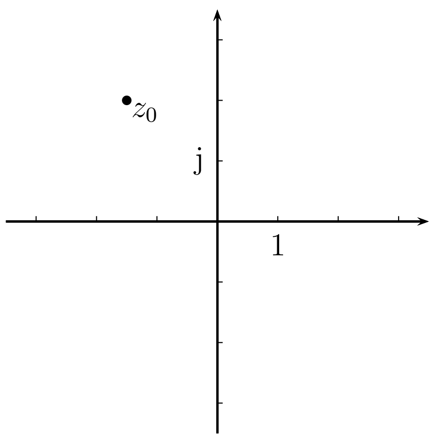


$M_4 = \{r_0 \cdot \mathrm{e}^{\varphi \mathrm{j}} \,|\, \varphi \in \mathbb{R}\}$

b) Zeichnen Sie zu dem in den Gaußschen Zahlenebenen markierten $z_0 \in \mathbb{C}$ jeweils die angegebene Punkte ein.



$z_1 = \frac{1}{z_0}$ und $z_2 = {z_0}^2$



alle w mit $w^2 = z_0$

Aufgabe 5 ($2 + 3 + 2 + 4 + 3 = 14$ Punkte)

Miniland hat dieses Jahr einen CO_2-Ausstoß von 2000 t. Es will seinen CO_2-Ausstoß jährlich um 20% reduzieren.

a) Geben Sie eine Formel für den CO_2-Ausstoß im n-ten Jahr an.
(Dieses Jahr = Jahr 0.)

b) Ab welchem Jahr beträgt der jährliche CO_2-Ausstoß weniger als 100 t?
(Ein formelmäßiger Ausdruck, in dem noch ein Logarithmus vorkommt, reicht.)

c) Wie groß ist der gesamte CO_2-Ausstoß (ab diesem Jahr bis in alle Ewigkeit)?

d) Nach wieviel Jahren hat Miniland in Summe mehr als 8000 t CO_2 ausgestoßen?
(Ein formelmäßiger Ausdruck, in dem noch ein Logarithmus vorkommt, reicht.)

e) Wie groß muss die jährliche Einsparung mindestens sein, damit der gesamte CO_2-Ausstoß höchstens 8000 t beträgt?

Aufgabe 6 $(5 + 6 = 11$ Punkte$)$

Sei $f_c(x) = x \cdot \ln(c \cdot x)$ mit einem Parameter $c > 0$ und Definitionsbereich $\mathbb{R}^{>0}$.

a) Wie muss c gewählt werden, damit f_c bei $x = 1$ eine Extremstelle hat?

b) Wie muss c gewählt werden, damit $\int\limits_0^1 f_c(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ist?

Tipp: Nutzen Sie eine geschickte partielle Integration!

Aufgabe 7 $(7 + 5 = 12$ Punkte$)$

a) Zeigen Sie mittels der Taylor-Entwicklung, dass die Potenzreihenentwicklung zur Funktion $f(x) = \arcsin x$ beginnt mit

$$\arcsin x \quad = \quad x + \frac{1}{6}x^3 + \text{ Terme mit } x^4 \text{ und höher.}$$

(Hinweis: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)

b) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\arcsin(2x) - x}{x^3}.$$

Aufgabe 8 $(3 + 3 = 6$ Punkte)

Das Integral $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ zur abgebildeten Funktion f (mit einer Maximalstelle bei 1.5 und einer Minimalstelle bei 5) soll durch eine Riemannsche Zwischensumme S zur Zerlegung

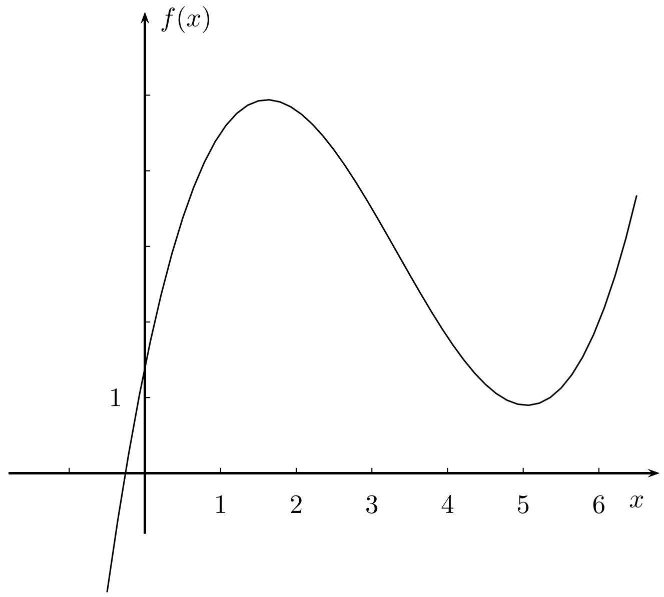
$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 6$$

angenähert werden.

a) Skizzieren Sie in dem Bild, wie sich die Riemannsche Zwischensumme S ergibt, wenn man als Zwischenstellen

$$\widehat{x_1} = 1, \quad \widehat{x_2} = 2, \quad \widehat{x_3} = 3.5, \quad \widehat{x_4} = 6$$

wählt. (Sie brauchen nur zu zeichnen, nicht zu rechnen.)

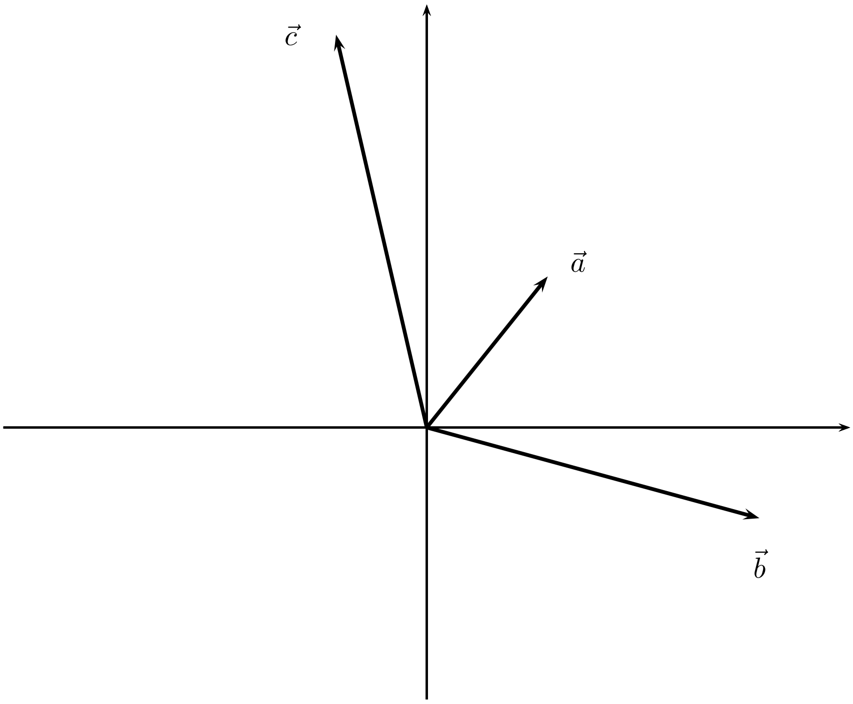


b) Welche Zwischenstellen $\widehat{x_1}$, $\widehat{x_2}$, $\widehat{x_3}$ und $\widehat{x_4}$ muss man wählen, damit die Riemannsche Zwischensumme S (bei gleicher Zerlegung) der Untersumme entspricht?

$\widehat{x_1} =$ $\qquad$ $\widehat{x_2} =$ $\qquad$ $\widehat{x_3} =$ $\qquad$ $\widehat{x_4} =$

Aufgabe 9 $(3 + 2 + 2 + 2 = 9$ Punkte)

Betrachtet werden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ entsprechend der Skizze.



a) Wie lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

Zeichnen Sie die Situation in die Skizze und geben Sie die Linearkombination an.

Hinweis: Die Koeffizienten der Linearkombination sind ganzzahlig!

b) Es sei $\vec{d} \;=\; \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Wie lässt sich $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen?

Geben Sie die Linearkombination an.

c) Gesucht ist ein Vektor $\vec{a}_1$, der die gleiche Länge wie $\vec{a}$ besitzt, so dass das Skalarprodukt von $\vec{a}_1 \cdot \vec{b}$ maximal groß wird.

Zeichnen Sie $\vec{a}_1$ in die Skizze oben ein!

d) Gesucht ist ein skalares Vielfaches $\vec{c}_1 = \lambda \cdot \vec{c}$ von $\vec{c}$, so dass das Skalarprodukt von $\vec{a} \cdot \vec{c}$ gleich dem Produkt der Längen von $\vec{c}$ und $\vec{c}_1$ ist.

Zeichnen Sie $\vec{c}_1$ in die Skizze oben ein!

Aufgabe 10 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

und

$$E_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Aufgabe 11 ($5 + 3 = 8$ Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar?

   (Tipp: Determinante!)

b) Geben Sie eine Matrix X an, so dass gilt

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$