
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

12.07.2022

Klausur zum Fach Mathematik 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 18.07. statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 21.07. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 13 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Max	6	10	12	12	8	6	8	9

Aufgabe	9	10	11	12	13	Σ_0	B.	Σ
Max	11	11	9	8	6	116	6	122

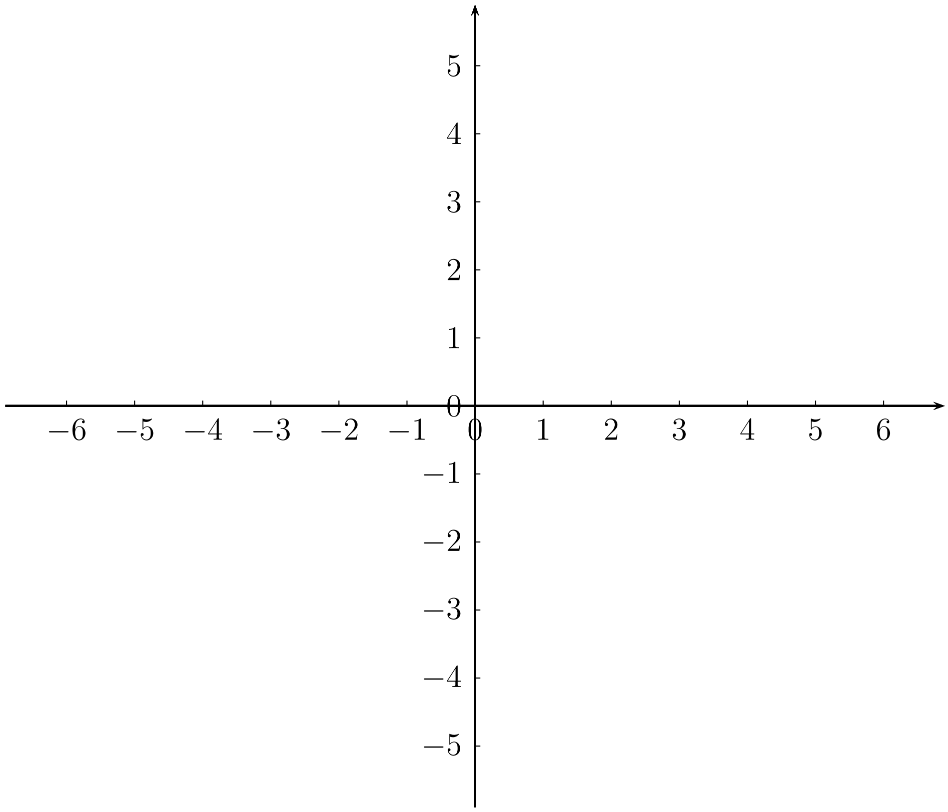
Note:

Aufgabe 1 ($3 + 3 = 6$ Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - 1$.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

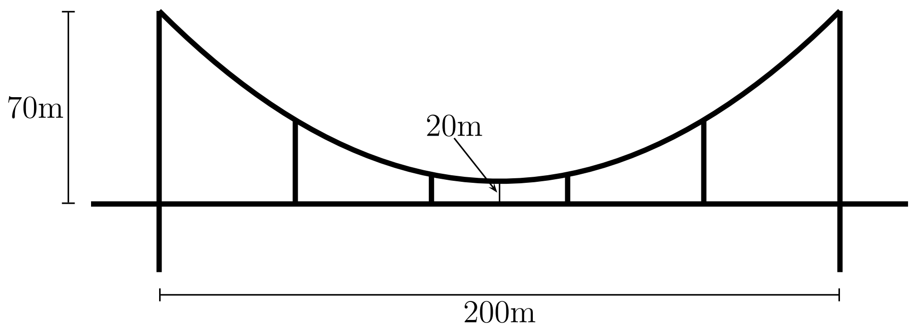
b) Skizzieren Sie den Funktionsgrafen zu f sowie den zur Umkehrfunktion f^{-1} in dem folgenden Koordinatensystem.



Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine 200m lange Hängebrücke besitzt ein parabelförmiges Hauptseil, das an den 70m hohen Pfeilern (von der Straße aus gemessen) aufgehängt ist und am tiefsten Punkt 20m über der Fahrbahn verläuft. Dazwischen sind in gleichen Abständen vier Tragseile für die Fahrbahn montiert (s. Skizze (nicht maßstabsgetreu)).

Wie lang sind diese vier Tragseile?



Aufgabe 3 (12 Punkte, davon bis zu 6 Enthaltungspunkte)

Markieren Sie den richtigen (gerundeten) Zahlenwert.

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

$\cos 2 =$	
0.973	
0.416	
-0.416	
-0.973	
Enthalt.	

$\arccos(-0.2) =$	
1.77	
0.635	
-0.635	
-1.77	
Enthalt.	

$\sqrt{0.2} =$	
4	
0.45	
0.045	
0.04	
Enthalt.	

$2^{-1.5} =$	
2.83	
0.354	
-0.354	
-2.83	
Enthalt.	

$\operatorname{ld} 5 =$	
2.32	
1.46	
-1.46	
-2.32	
Enthalt.	

$\ln 0.3 =$	
2.43	
1.20	
-1.20	
-2.43	
Enthalt.	

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Geben Sie zu den angegebenen komplexen Zahlen z die entsprechenden Werte an (bei d), e) und f) egal ob in kartesischer oder Polar-Darstellung).

		$z = 3 - 4\mathrm{j}$	$z = 3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$
a)	$\lvert z\rvert$		
b)	$\operatorname{Re} z$		
c)	$\operatorname{Im} z$		
d)	z^*		
e)	z^2		
f)	$\frac{1}{z}$		

Aufgabe 5 $(3 + 2 + 3 = 8$ Punkte)

a) Geben Sie

   a1) eine rekursive Definition einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   a2) eine direkte Definition von a_n in Abhängigkeit von n an,

   so dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Folgengliedern beginnt:

$$a_1 = -4, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 5, \quad a_5 = 8.$$

b) Geben Sie eine direkte Definition von b_n in Abhängigkeit von n an, so dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Folgengliedern beginnt:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -\tfrac{1}{3}, \quad b_3 = \tfrac{1}{5}, \quad b_4 = -\tfrac{1}{7}, \quad b_5 = \tfrac{1}{9}.$$

c) Geben Sie c_k an, so dass für die Partialsummen s_n zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ gilt

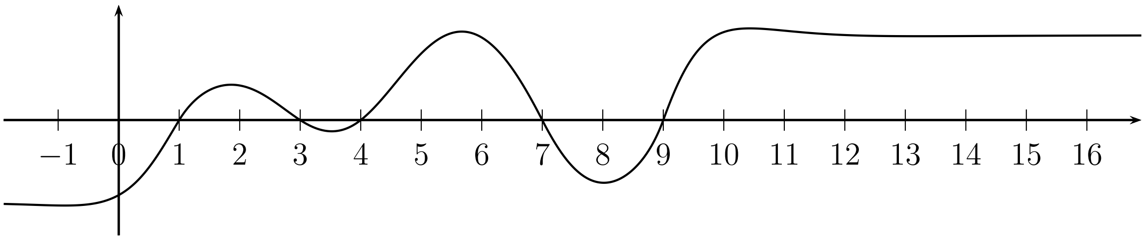
$$s_1 = 2, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 12, \quad s_4 = 20, \quad s_5 = 30.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Betrachtet wird die unten skizzierte stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Nullstellen bei 1, 3, 4, 7 und 9.

Für welche $b \in [0, 16]$ konvergiert das Bisektionsverfahren mit den Startwerten $a = 0$ und b gegen die Nullstelle 1?

Geben Sie sämtliche Bereiche innerhalb von $[0, 16]$ an, in denen b dazu liegen kann.



Aufgabe 7 $(4 + 4 = 8$ Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1) \cdot \ln x}{\cos(\pi \cdot x) + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} - 1 \right)$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Eine Firma will den optimalen Preis für ein Produkt bestimmen. Die Herstellungskosten liegen pro Stück bei h. Je teurer das Produkt angeboten wird, desto weniger wird davon verkauft; Marktanalysen haben ergeben, dass bei einem Verkaufspreis p die Anzahl der verkauften Produkte mit $\frac{c}{p^2}$ pro Jahr (mit einer Konstanten c) prognostiziert werden kann.

Zu welchem Preis p soll die Firma das Produkt anbieten, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(Das Ergebnis kann noch von h oder c abhängen.)

Aufgabe 9 $(3 + 4 + 4 = 11$ Punkte)

Bestimmen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(7x+1)^4}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int x \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 10 $(2 + 6 + 3 = 11$ Punkte)

Sei V der Vektorraum aller linearen Funktionen $f(x) = mx + b$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Im Folgenden werden $f, g \in V$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = 3x + 1$ betrachtet.

a) Stellen Sie $h(x) = x + 2$ als Linearkombination von f und g dar.

b) Berechnen Sie das Skalarprodukt von f und g sowie die Länge (bzgl. des Skalarprodukts) von g.

c) Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $h(x) = x + c$ zu f orthogonal (bzgl. des Skalarprodukts) ist?

Aufgabe 11 (9 Punkte)

Ein Flugzeug befindet sich bezüglich eines vorgegebenen Koordinatensystems mit „1 km"-Einheit aktuell am Punkt $(-4, 12, 8)$ und fliegt geradlinig mit Geschwindigkeit $450\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ zum Punkt $(10, 7, 10)$.

An welchem Punkt befindet sich das Flugzeug nach einer Minute?

Hinweis: Als Taschenrechner-Ersatz hier eine Tabelle von Quadratzahlen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n^2	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Geben Sie sämtliche Lösungen an zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 13 $(4 + 2 = 6$ Punkte)

a) Füllen Sie die leeren Felder unten so aus, dass links und rechts die gleiche quadratische Form zu $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ steht.

$$x^T \begin{pmatrix} \square & \square & 7 \\ 1 & \square & 2 \\ -1 & \square & 4 \end{pmatrix} x \;=\; \begin{matrix} -{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + \square\, {x_3}^2 \\ +4x_1x_2 + \square\, x_1x_3 \end{matrix}$$

b) Geben Sie eine *symmetrische* Matrix B an, die die gleiche quadratische Form erzeugt, wie die in Aufgabenteil a) angegebene.