
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

22.09.2021

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 6 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 6) in diesem Teil und alle 5 Aufgaben (Aufgabe 7 bis 11) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	8	4	10	18	8	8	56	54	5.5	110+5.5

Note:

Aufgabe 1 $(2+2+2+2=8$ Punkte$)$

a) Geben Sie die Funktionsvorschrift einer gebrochen rationalen Funktion f an, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

   1) f hat eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x=4$,

   2) f hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x=-2$.

b) Geben Sie die Funktionsvorschrift einer gebrochen rationalen Funktion f an, die die beiden Bedingungen aus a) erfüllt, und bei der zusätzlich gilt:

   - $f(1)=0$.

c) Geben Sie die Funktionsvorschrift einer gebrochen rationalen Funktion f an, die die beiden Bedingungen aus a) erfüllt, und bei der zusätzlich gilt:

   - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

d) Geben Sie die Funktionsvorschrift einer gebrochen rationalen Funktion f an, die die beiden Bedingungen aus a) erfüllt, und bei der zusätzlich die beiden folgenden Eigenschaften gelten:

   - $f(1)=0$,
   - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

Hinweis: Die Funktionen, die Sie zu den Teilaufgaben angeben, müssen nicht notwendig verschieden sein.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachtet wird die Funktion

$$f : D \to W, \quad f(x) \ = \ x^2$$

mit Definitions- und Zielbereich $D, W \subseteq \mathbb{R}$.

Geben Sie jeweils einen konkreten Definitions- und Zielbereich $D, W \subseteq \mathbb{R}$ an so dass,

a) die Funktion $f : D \to W$ injektiv aber nicht surjektiv ist,

b) die Funktion $f : D \to W$ surjektiv aber nicht injektiv ist,

c) die Funktion $f : D \to W$ weder injektiv noch surjektiv ist,

d) die Funktion $f : D \to W$ bijektiv ist.

Aufgabe 3 $(6+2+2=10$ Punkte)

Die Anzahl der Neuinfektionen $f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t bei einer Epidemie lässt sich in der Anfangsphase modellieren durch

$$f(t) \; = \; a \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot t}$$

mit Parametern a und λ.

Am 05. Oktober 2020 wurden ca. 3000 Corona-Neuinfektionen in Deutschland gezählt, 7 Tage später waren es ca. 4500.

a) Wie groß ist λ (ausgehend von diesen Daten)?

b) Wieviel Neuinfektionen sind entsprechend des Modells und der Anpassung für nochmals 7 Tage später zu erwarten?

c) Wodurch kann man sehen, dass das Modell nur die Anfangsphase der Epidemie modellieren kann, auch wenn keine Gegenmaßnahmen ergriffen worden wären?

Aufgabe 4 $(2+4+2+4+6 = 18$ Punkte)

In den komplexen Zahlen seien

$$z_k \;=\; \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{j}\right)^k \qquad \text{und} \qquad s_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} z_k .$$

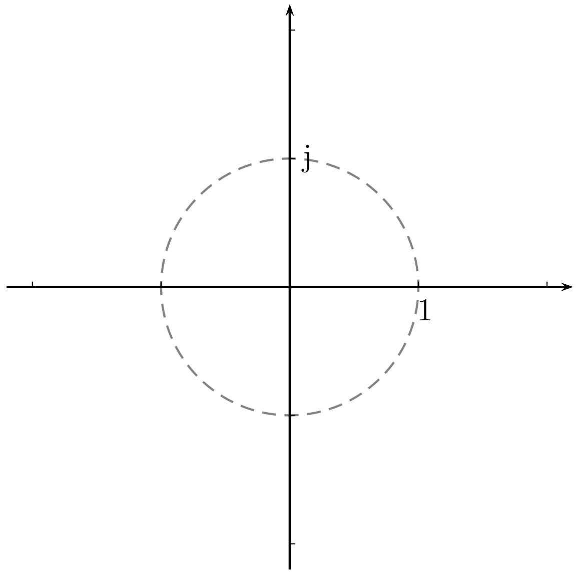
a) Berechnen Sie z_2.

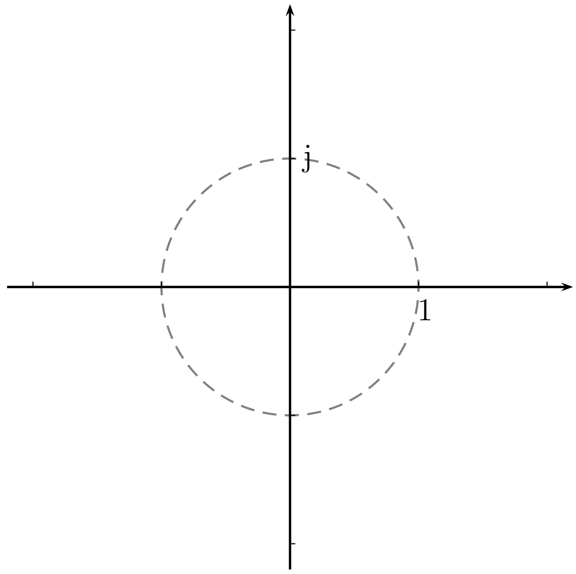
b) Markieren Sie in dem Bild links die ungefähre Lage von z_k zu $k = 0, \ldots, 4$.

c) Berechnen Sie s_2.

d) Markieren Sie in dem Bild rechts die ungefähre Lage von s_n zu $n = 0, \ldots, 4$.

e) Begründen Sie, warum $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert in der Form $a + b\mathrm{j}$ an.





Aufgabe 5 $(4 + 4 = 8$ Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x) - 2x}{\sin x - x}.$$

Hinweis: Sie können benutzen, dass die Potenzreihe der arcsin-Funktion beginnt mit

$$\arcsin x \;=\; x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \ldots .$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$$

Tipp: Dritte binomische Formel!

Aufgabe 6 $(4+4=8$ Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = cx^2 + \sin(3x^2)$ mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Parameterwerte c ist die Funktion f in $\mathbb{R}^{>0}$ monoton wachsend?

b) Begründen Sie, warum es keinen Parameterwert c gibt, für den f in $\mathbb{R}^{>0}$ linksgekrümmt ist.

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

22.09.2021

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	7	8	9	10	11	Σ
Max	10	14	6	12	12	54

Aufgabe 7 $(4 + 6 = 10$ Punkte$)$

Sei $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Skizzieren Sie f sowie die Funktionsgrafen zum ersten und zweiten Taylorpolynom zu f in 2. (Sie brauchen die Taylorpolynome nicht zu berechnen.)

b) Wie lautet das dritte Taylorpolynom zu f in 3?

(Sie brauchen die Darstellung des Polynoms nicht zu vereinfachen.)

Aufgabe 8 (14 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int (3x+4)^5 \,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int x \cdot \cos(x^2) \,\mathrm{d}x,$

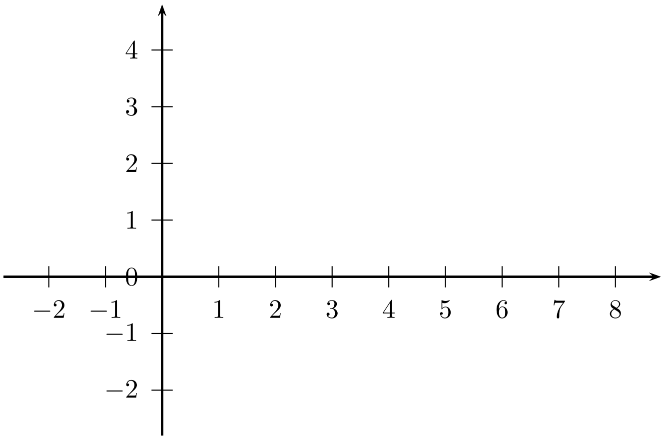
d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x} \,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

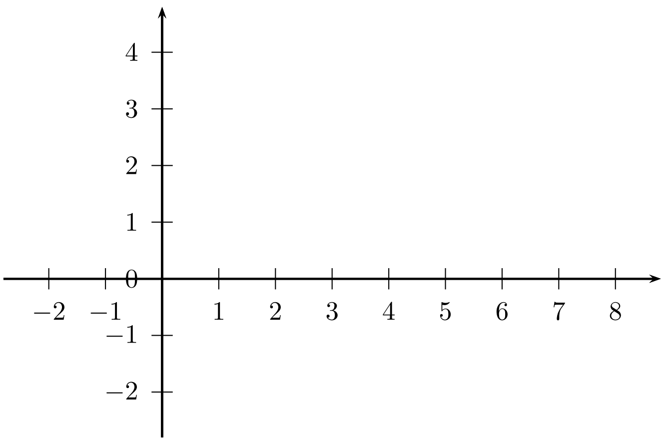
Skizzieren Sie die angegebenen Mengen M in den Koordinatensystemen.

Hinweis: Achten Sie auf die Parameterbereiche!

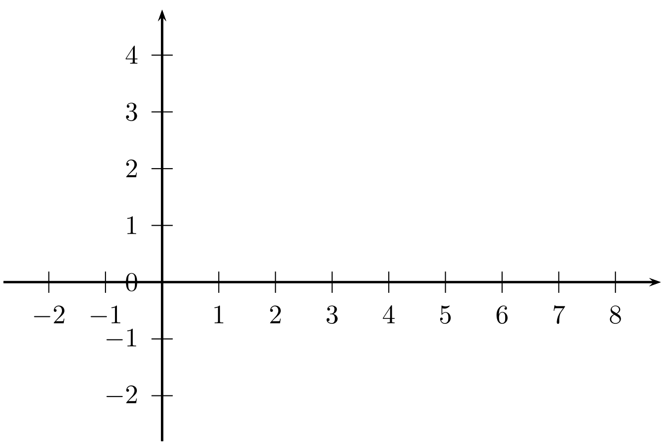
a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in [-1, 2] \right\}$



b) $M = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in [0, 2], \mu \in [0, 1] \right\}$



c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in [-1, 1], \mu \in [0, 1] \right\}$



Aufgabe 10 $(2+5+5=12$ Punkte)

Gegeben ist der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit einem Parameter a.

a) Für welchen Parameterwert a steht $\vec{v}$ senkrecht auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

b) Für welche Parameterwerte a schließt $\vec{v}$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 45° ein?

c) Für welche Parameterwerte a besitzt das von $\vec{v}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 7?

Aufgabe 11 $(7 + 5 = 12$ Punkte$)$

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1}.

b) 1) Geben Sie die quadratische Form $f(x) = x^T Ax$ für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ in Koordinatendarstellung als $f(x_1, x_2, x_3)$ an.

2) Geben Sie eine symmetrische Matrix B an, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$x^T Ax \;=\; x^T Bx.$$