
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

21.07.2021

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 27.07., vormittags, statt. Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden am 27.07., nachmittags, statt.

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 7 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 7) in diesem Teil und alle 6 Aufgaben (Aufgabe 8 bis 13) im zweiten Teil in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	7	6	12	7	12	8	10	62	54	5.5	116+5.5

Note:

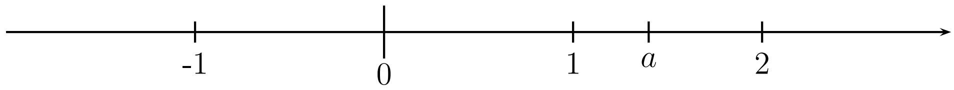
Aufgabe 1 (7 Punkte)

Markieren Sie zu a auf dem Zahlenstrahl jeweils (falls definiert) die ungefähre Lage von

$$x_1 = a^2, \quad x_2 = \sqrt{a}, \quad x_3 = \frac{1}{a}, \quad x_4 = 2^a, \quad x_5 = \log_2 a,$$

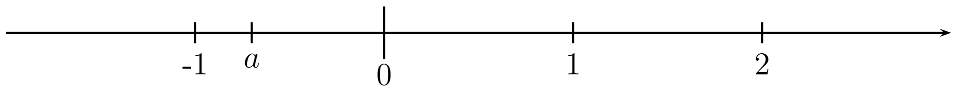
bzw. notieren Sie in der Zeile „nicht definiert:“ das x_k, falls es nicht definiert ist.

a)



nicht definiert:

b)



nicht definiert:

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es gilt $\sin(0.93) \approx 0.80$.

Tragen Sie davon ausgehend ungefähre Werte x (auf zwei Dezimalstellen genau) in die Tabelle ein, die jeweils die Bedingung links erfüllen.

Sie können mit $\pi \approx 3.14$ rechnen.

Es reicht die Angabe von *einem* x-Wert, auch wenn es mehrere x gibt, die die Bedingung erfüllen.

Bedingung	$x \approx$
$1 < x < 6$ und $\sin(x) = 0.8$	
$x < 0$ und $\sin(x) = 0.8$	
$\sin(x) = -0.8$	
$x = \arccos(-0.8)$	
$\cos(0.93) = x$	

Aufgabe 3 $(6 + 6 = 12$ Punkte)

a) Zerlegen Sie $p(x) = x^3 - x - 6$ vollständig in (ggf. komplexe) Linearfaktoren.

b) Gesucht ist eine lineare Funktion $f(z) = mz + b$, $m, b \in \mathbb{C}$, die

$$f(2) \;=\; 5 + 7\mathrm{j} \qquad \text{und} \qquad f(1 - 2\mathrm{j}) \;=\; 6 - \mathrm{j}$$

erfüllt. Welchen Wert haben m und b?

Aufgabe 4 $(1 + 2 + 4 = 7$ Punkte)

In Musterland gibt es eine Vermögenssteuer: Am Jahresende muss jeder 10% seines aktuellen Besitzes als Steuer abgeben.

Herr Mustermann spart jährlich 5000 €. Das Guthaben von Herrn Mustermann zu Beginn des Jahres n sei mit G_n bezeichnet. Im Jahre 0 hat er ein Vermögen von $G_0 = 10000$€.

a) Bestimmen Sie G_1.

b) Stellen Sie eine Formel für G_{n+1} in Abhängigkeit von G_n auf.

c) Man kann sich überlegen (das brauchen Sie nicht zu tun), dass das Guthaben sich im Laufe der Zeit immer mehr einem Wert G nähert.

   Wie groß ist G?

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	konvergiert	konv. nicht	Enthaltung
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k+2}{(k+1)^3}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k}$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 2^k$			
$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$			

Aufgabe 6 $(2 + 2 + 4 = 8$ Punkte)

Von einem Turm der Höhe h aus ist die Horizontlinie

$$w(h) \quad = \quad \sqrt{2Rh + h^2}$$

weit entfernt, wobei $R \approx 6370\,\mathrm{km}$ den Erdradius bezeichnet.

(Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.)

a) Geben Sie die Ableitung $w'(h)$ an.

b) Nutzen Sie die Ableitung von w, um eine Näherungsformel anzugeben, wieviel weiter die Horizontlinie entfernt ist, wenn der Turm um Δh höher ist.

c) Bei einem Turm der Höhe $h = 100\,\mathrm{m}$ ist $w(h) \approx 35\,\mathrm{km}$.

   (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

   Nutzen Sie die Formel aus b), um einen Näherungswert (als Dezimalzahl) anzugeben, wieviel weiter die Horizontlinie entfernt ist, wenn man den Turm um $\Delta h = 2\,\mathrm{m}$ erhöht.

   (Das exakte Ergebnis soll innerhalb von $\pm 20\%$ Ihres Ergebnisses liegen.)

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Mit Hilfe des Newton-Verfahren soll $\sqrt{3}$, also eine Lösung von $x^2 = 3$ bestimmt werden. Als Startpunkt wird $x_0 = 1$ gewählt.

a) Führen Sie zwei Schritte der Newton-Iteration aus.

b) Zeichnen Sie die Situation inklusive der beiden Newton-Schritte.

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

21.07.2021

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 120 Minuten für beide Teile (zwischen den beiden Teilen können Sie beliebig hin und her wechseln.)

Aufgabe	8	9	10	11	12	13	Σ
Max	6	8	12	11	8	9	54

Note:

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Geben Sie die Werte der folgenden Integrale an.

(Tipp: Sie brauchen keine Stammfunktion zu bestimmen; sehen Sie sich den Integranden bzw. die dadurch dargestellte Funktion an an!)

a) $\displaystyle\int_0^4 |x-1| \,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \; = \; \frac{1}{x + \sqrt{x}}.$$

Tipp: Substitution $x = u^2$.

Aufgabe 10 $(2+2+2+6=12$ Punkte)

Sei V der Vektorraum der Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

a) Wie kann man $v(x)=(x+1)^2$ als Linearkombination aus

$$v_1(x)=1,\quad v_2(x)=x,\quad \text{und}\quad v_3(x)=x^2$$

darstellen?

b) Wie kann man $v(x)=\sin(x+1)$ als Linearkombination aus

$$v_1(x)=\sin x,\quad \text{und}\quad v_2(x)=\cos x$$

darstellen? (Tipp: Additionstheorem!)

c) Wie kann man $v(x)=\mathrm{e}^{x+1}$ als Linearkombination aus

$$v_1(x)=1,\quad v_2(x)=\mathrm{e}^{x},\quad \text{und}\quad v_3(x)=\mathrm{e}^{2x}$$

darstellen?

d) Wie kann man $v(x)=\frac{x}{x^2-x-2}$ als Linearkombinationen von Funktionen der Form

$$v_a(x)=\frac{1}{x+a},\quad a\in\mathbb{R}$$

darstellen? (Tipp: Partialbruchzerlegung!)

Aufgabe 11 $(4 + 4 + 3 = 11$ Punkte)

a) Geben Sie eine Normalenform für die Ebene

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

an.

b) Geben Sie eine Parameterform für die Ebene

$$E_2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 5 \}$$

an.

c) Gilt $E_1 = E_2$? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 13 (9 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^2.

b) Bestimmen Sie $\det A$, $\det(2A)$, $\det(A^2)$ und $\det(A^{-1})$.