| | | |
|---|---|---|
| (Name) | (Vorname) | (Matrikelnummer) |

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

07.07.2020

# Klausur zum Fach Mathematik 1
## Teil 1

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 8 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 8) in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

*Viel Erfolg!*

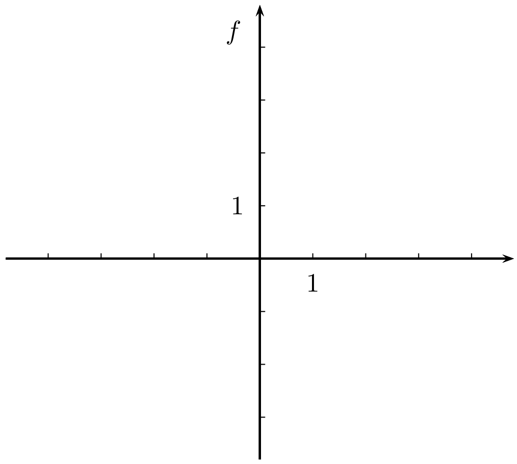
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\Sigma_1$ | $\Sigma_2$ | B. | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max | 11 | 8 | 9 | 8 | 12 | 8 | 14 | 10 | 80 | 80 | 8 | 160+8 |
| | | | | | | | | | | | | |

Note:

**Aufgabe 1** ($1 + 5 \times 2 = 11$ Punkte)

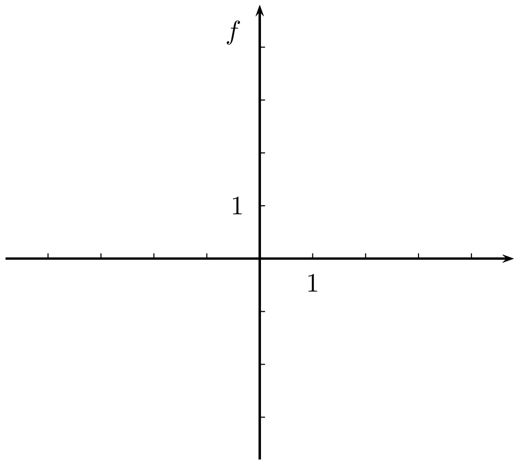
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



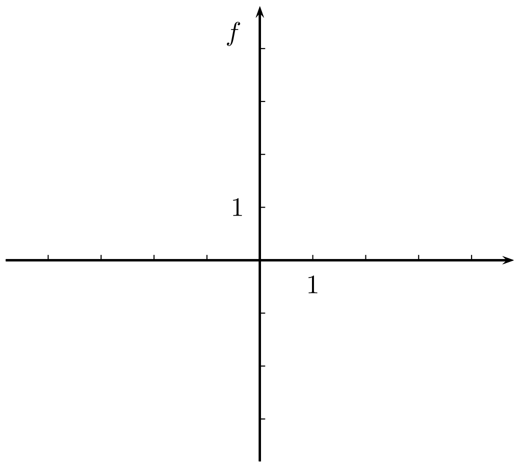

$f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

b)



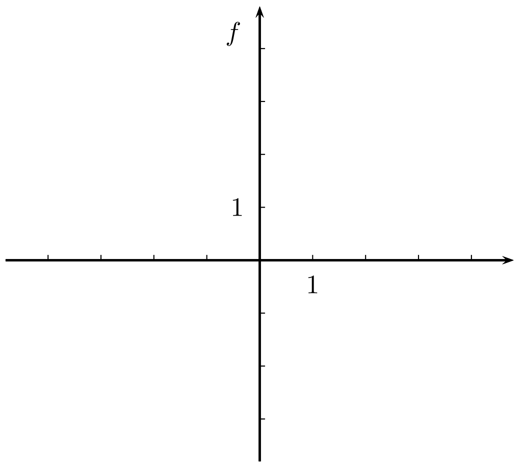

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

c)



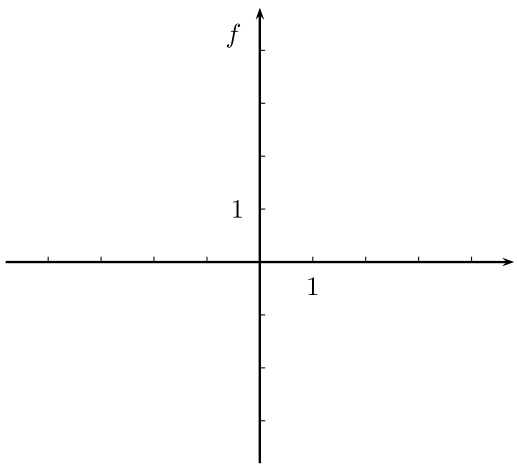

$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

d)



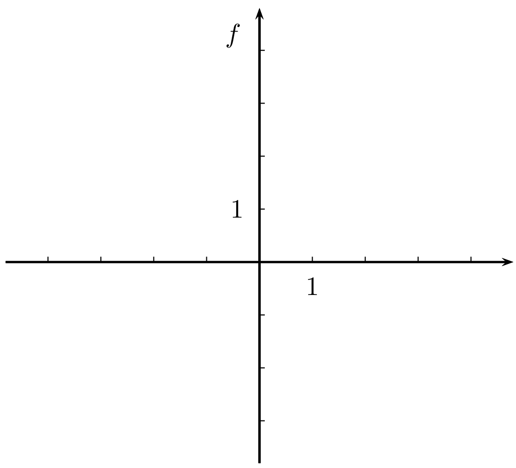

$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$

e)




$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

f)

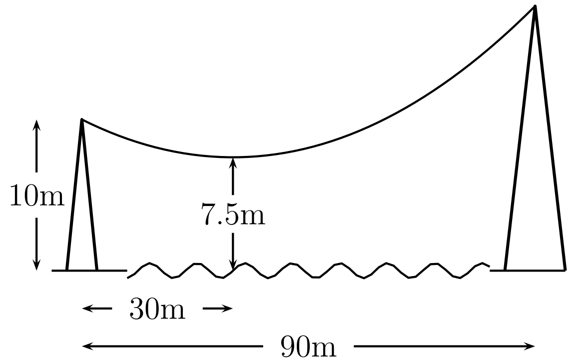



$f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$

**Aufgabe 2** (8 Punkte)

Über einen Fluss soll eine Stromleitung verlegt werden.

Auf dem linken Ufer steht ein 10m hoher Mast, der Mast rechts ist 90m entfernt. Der tiefste Punkt der Leitung soll 30m vom linken Mast entfernt in 7,5m Höhe liegen (s. Skizze).




Wie hoch muss der rechte Mast sein, wenn man die hängende Leitung als parabelförmig annimmt?

**Aufgabe 3** $(3 + 2 + 2 + 2 = 9$ Punkte)

a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift eines Polynoms $p$ an, das die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1) $p$ schneidet die $x$-Achse (mit Vorzeichenwechsel) bei $x = -2$ und $x = 1$,
2) $p$ berührt die $x$-Achse (ohne Vorzeichenwechsel) bei $x = 2$ und $x = 4$,
3) $\lim_{x \to \infty} p(x) = -\infty$.

b) Geben Sie eine Funktionsvorschrift eines Polynoms $p$ an, das die drei Bedingungen aus a) erfüllt, und bei dem zusätzlich gilt:

- $p(0) = 1$.

c) Geben Sie eine Funktionsvorschrift eines Polynoms $p$ an, das die drei Bedingungen aus a) erfüllt, und bei dem zusätzlich gilt:

- Der Berührpunkt an die $x$-Achse bei $x = 2$ ist von oben (d.h., in der Nähe von $x = 2$ ist $p(x) \geq 0$).

d) Geben Sie eine Funktionsvorschrift eines Polynoms $p$ an, das die drei Bedingungen aus a) erfüllt, und bei dem zusätzlich gilt:

- $p(0) = -6$.

**Aufgabe 4** (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Ist der linke Ausdruck kleiner oder größer als der rechte?

Tragen Sie das richtige Zeichen ein.

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte. (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

| | „<“ oder „>“ | |
|---|---|---|
| $2^{-5}$ | | $3^{-5}$ |
| $5^{-2}$ | | $5^{-3}$ |
| $\sqrt[2]{5}$ | | $\sqrt[3]{5}$ |
| $\sqrt[2]{0.5}$ | | $\sqrt[3]{0.5}$ |
| $0.5^{0.5}$ | | $0.5$ |
| $\log_5 10$ | | $\log_6 10$ |
| $\log_8 7$ | | $1$ |
| $\log_{\frac{1}{2}} 2$ | | $\log_{\frac{1}{2}} 4$ |

**Aufgabe 5** ($6 + 6 = 12$ Punkte)

Geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$ an mit $\frac{1}{z} = a + b\mathrm{j}$ sowie $c, d \in \mathbb{R}$ an mit $z^{10} = c + d\mathrm{j}$ zu

a) $z = 1 + \mathrm{j}$,

b) $z = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$.

**Aufgabe 6** ($4 \times 2 = 8$ Punkte)

Welche Werte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) haben die folgenden Reihen?
(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen)

a) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} - + \ldots \ =$

b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{243} + \ldots \ =$

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} + \ldots \ =$

d) $1 + \dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + \dfrac{2^4}{4!} + \ldots \ =$

**Aufgabe 7** $(6 + 2 + 6 = 14$ Punkte)

Sei

$$f(x) \;=\; x^2 + 2x - 4.$$

a) Führen Sie ausgehend vom Intervall $[0; 2]$ das Bisektionsverfahren so lange durch, bis Sie ein Intervall der Länge $\frac{1}{4}$ erhalten, in dem eine Nullstelle von $f$ liegt.

b) Welchen Wert hat die Nullstelle genau, gegen die das Bisektionsverfahren aus a) konvergiert?

c) Wieviel Schritte muss man mit dem Bisektionsverfahren machen, um ausgehend von 0 und 2 ein Intervall der Länge $10^{-6}$ anzugeben, in dem eine Nullstelle liegt?

   Geben Sie die Anzahl sowohl formelmäßig als auch näherungsweise an.

**Aufgabe 8** (10 Punkte)

Sei

$$f(x) \;=\; x \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

Welche Werte haben die Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x)?$$

(Die Angabe falscher Werte ohne Begründung führt zu Punktabzug!)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

07.07.2020

# Klausur zum Fach Mathematik 1
# Teil 2

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *kein Taschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 7 Aufgaben (Aufgabe 9 - Aufgabe 15) in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

*Viel Erfolg!*

| Aufgabe | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | $\Sigma_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max | 13 | 7 | 10 | 10 | 12 | 10 | 18 | 80 |
| Ist | | | | | | | | |

**Aufgabe 9** ($6 + 7 = 13$ Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_{2;0}$ zweiten Grades in $x_0 = 0$ zu

$$f(x) \quad = \quad \cos x \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

auf zwei verschiedene Weisen, nämlich

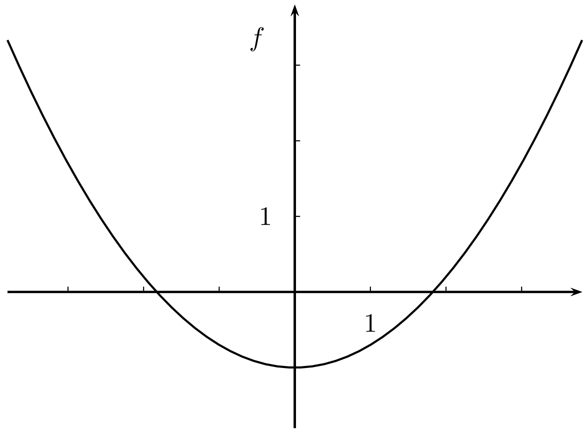
a) indem Sie die Definition des Taylorpolynoms mit den entsprechenden Ableitungen nutzen,

b) indem Sie die Potenzreihenentwicklungen nutzen.

**Aufgabe 10** ($1 + 6 = 7$ Punkte)

Zu einer gegebenen Funktion $f$ wird ein $x_0 > 0$ gesucht mit $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

a) Wo liegt ein solches $x_0$ ungefähr bei $f$ entsprechend der Skizze? Markieren Sie die entsprechende Stelle.




b) Berechnen Sie ein solches $x_0$ bei $f(x) = x^2 - 4$.

**Aufgabe 11** (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$f(x) \;=\; \frac{4x-2}{x^2+2x+5}.$$

Tipp: $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$ und die ln-Funktion sind hilfreich.

**Aufgabe 12** (10 Punkte)

Für welche Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ beschreiben

$$E_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} |\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

und

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} |\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

die gleiche Ebene?

**Aufgabe 13** (maximal 12, minimal 0 Punkte)

Welche Aussage trifft jeweils auf die in der Tabelle stehende Gleichung zu?

1) Die Gleichung ist stets eindeutig nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar.
2) Für die Gleichung gibt es stets mehrere Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
3) Es gibt Fälle, in denen die Gleichung nicht nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung eindeutig.
4) Es gibt Fälle, in denen die Gleichung nicht nach $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ auflösbar ist. Im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung mehrdeutig.

(Dabei sind $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\lambda$ bzw. $A$ jeweils fest vorgegeben.)

Tragen Sie die entsprechenden Nummern in die Tabelle ein.

Jeder richtige Eintrag zählt +1.5 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

| | |
|---|---|
| $\vec{v}_1 + \vec{x} \;=\; \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3)$ | |
| $\vec{v} \cdot \vec{x} \;=\; \lambda \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v} \neq \vec{0},\ \lambda \in \mathbb{R})$ | |
| $\vec{v}_1 \times \vec{x} \;=\; \vec{v}_2 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v}_1 \neq \vec{0})$ | |
| $\lambda \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$ | |
| $A \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A \text{ invertierbar},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$ | |
| $A \cdot \vec{x} \;=\; \vec{v} \quad (A \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A \text{ nicht invertierbar},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3)$ | |
| $\vec{x} \cdot \vec{x} \;=\; 1$ | |
| $\vec{x} \cdot \vec{x} \;=\; 0$ | |

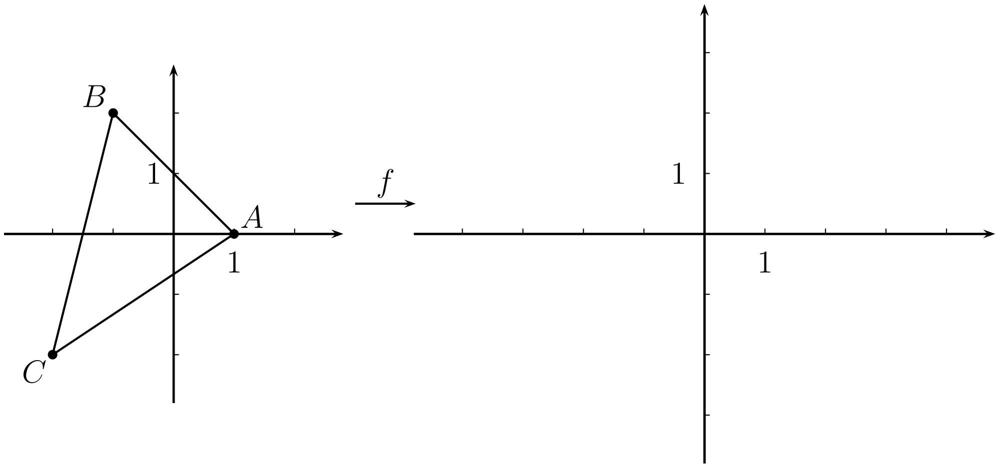
**Aufgabe 14** $(4 + 6 = 10$ Punkte$)$

a) Betrachtet wird die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$$

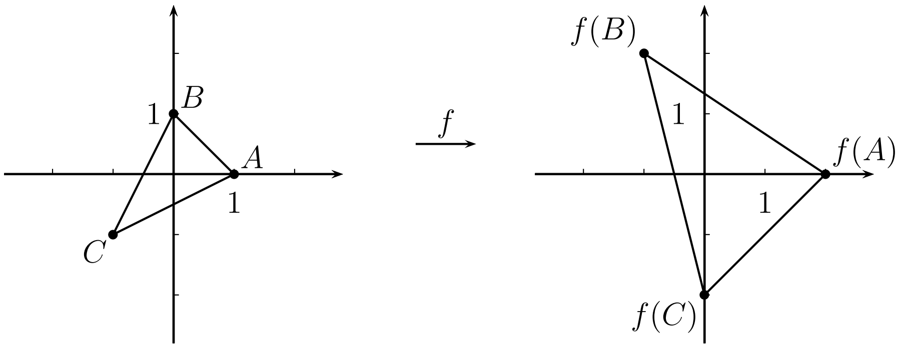
die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ der Ebene einen Punkt $f(x) \in \mathbb{R}^2$ zuordnet.

Wie wird bei dieser Abbildung das dargestellte Dreieck abgebildet? Zeichnen Sie das Bild in das rechte Koordinatensystem.




b) Gibt es eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass das unten links dargestellte Dreieck durch die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = M \cdot x$ auf das rechts dargestellte Dreieck abgebildet wird?

Falls ja: Wie lautet $M$? Falls nein: Warum nicht?



**Aufgabe 15** $(3 + 2 + 4 + 9 = 18$ Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Welchen Wert hat $\det A$?

b) Geben Sie $A^T$ und den Wert von $\det(A^T)$ an.

c) Geben Sie $A^2$ und den Wert von $\det(A^2)$ an.

d) Geben Sie $A^{-1}$ und den Wert von $\det(A^{-1})$ an.