FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)						

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

13.03.2020

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 08.04. statt.
Ggf. notwendige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 15.04. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 9 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 9) in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

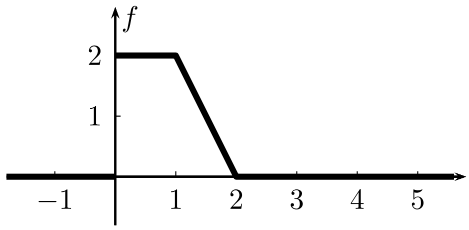
Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	8	8	8	8	10	11	10	8	9	80	80	8	160+8

Note:

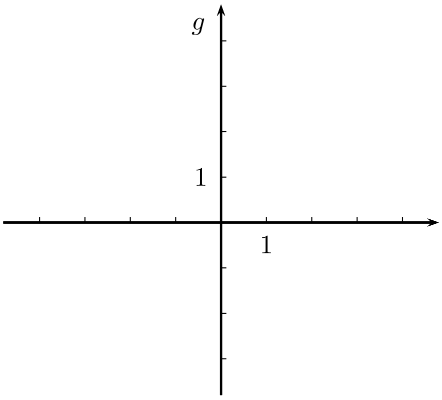
Aufgabe 1 ($4 \times 2 = 8$ Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Funktionsgraf:



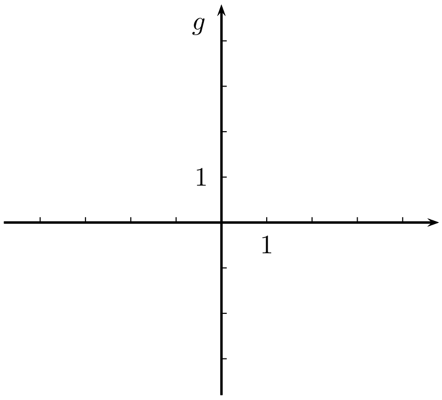
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



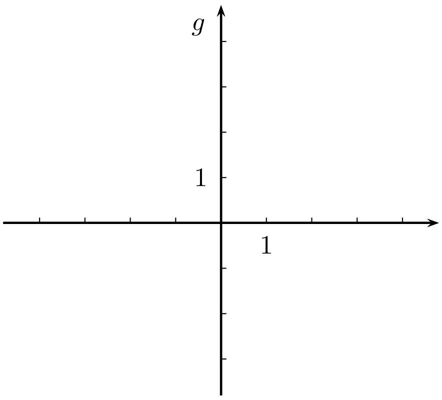
$g(x) = f(x+2) - 1$

b)



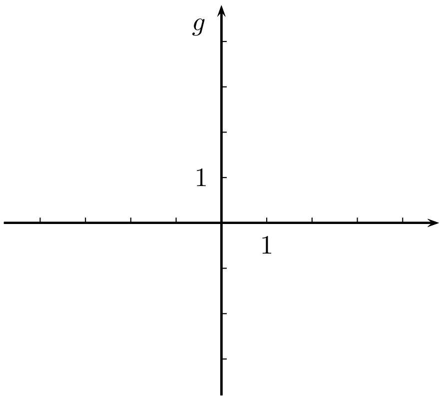
$g(x) = 2 \cdot f(-x)$

c)



$g(x) = -f(2 \cdot x)$

f)



$g(x) = f(\frac{1}{2}x + 2)$

Aufgabe 2 ($1 + 1.5 + 1.5 + 2 + 2 = 8$ Punkte)

Gegeben ist die Gerade g mit der Geradengleichung

$$g(x) \;=\; 2x - 4.$$

Geben Sie im folgenden jeweils eine Geradengleichung $h(x)$ an, so dass die Gerade h die genannte Eigenschaft besitzt.

Hinweis: Bei manchen Teilaufgaben ist h durch die Beschreibung nicht eindeutig festgelegt. Es reicht dann die Angabe *einer* Geradengleichung.

a) h ist parallel zu g und liegt oberhalb von g.

b) h ist parallel zu g und verläuft durch den Punkt $(3\,;1)$.

c) h schneidet g an der Stelle $x = 3$.

d) h schneidet g an der Stelle $x = 1$ und hat den y-Achsenabschnitt 2.

e) h hat die gleiche Nullstelle wie g aber einen anderen y-Achsenabschnitt.

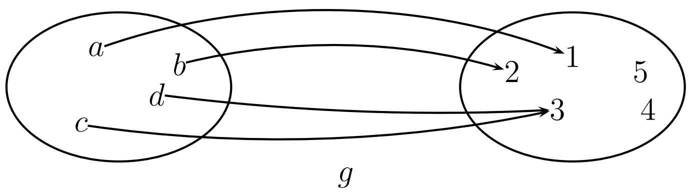
Aufgabe 3 (8 Punkte)

Geben Sie alle Werte $x \in [0, 2\pi]$ an, für die gilt

$$\cos^2 x + \sin x \;=\; \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 4 (minimal 0, maximal 8 Punkte)

Betrachtet wird zum Einen $f(x) = x^2$ und zum Anderen die skizzierte Abbildung g



jeweils mit verschiedenen Definitions- und Zielbereichen.

Geben Sie jeweils an, ob die Funktion injektiv bzw. surjektiv ist.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen. Jeder richtige Eintrag zählt +0.5 Punkte, jeder falsche −0.5; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

	injektiv		surjektiv	
	ja	nein	ja	nein
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$				
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$				
$f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$				
$f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$				
$g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$				
$g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$				
$g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$				
$g : \{c\} \to \{3, 4, 5\}$				

Aufgabe 5 (10 Punkte)

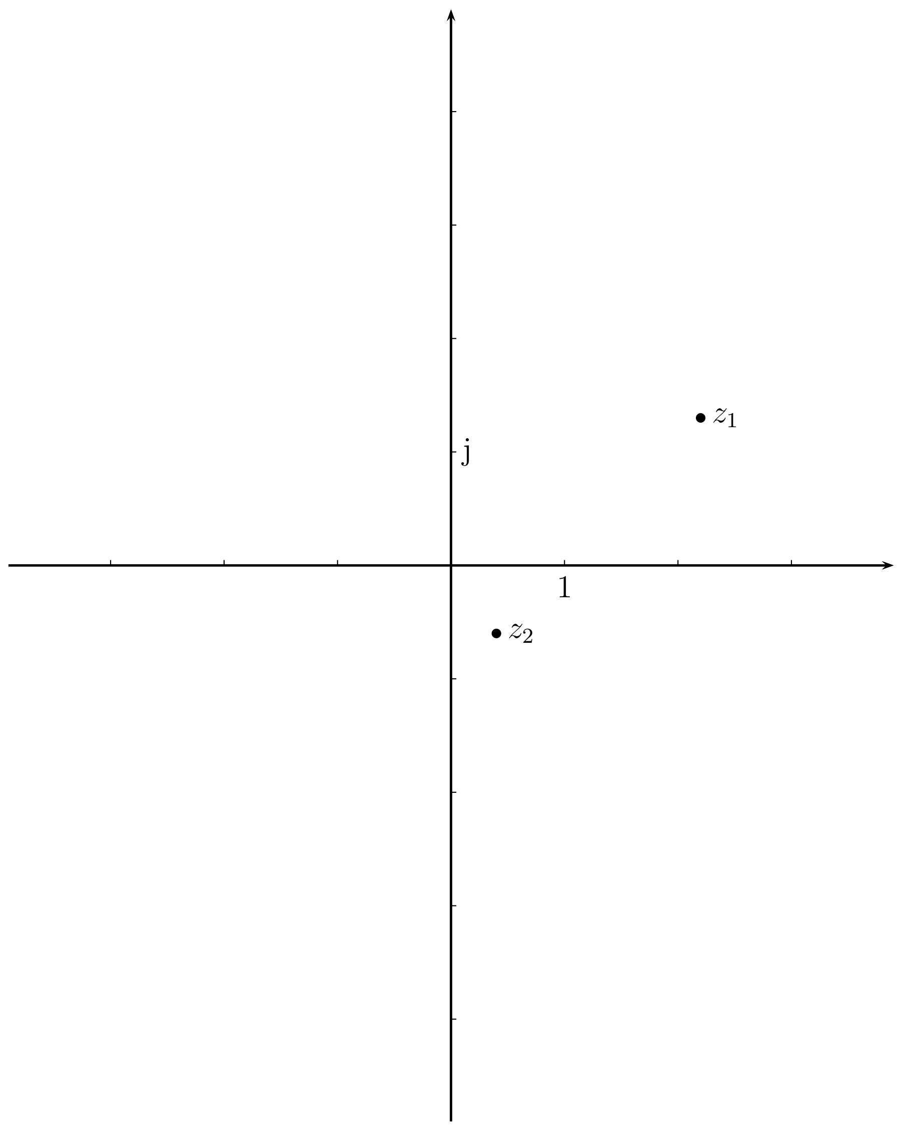
In der unten abgebildeten Gaußschen Zahlenebene sind zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 markiert.

Skizzieren Sie in dem Bild, wo ungefähr die folgenden Zahlen liegen:

$$w_1 = 2 \cdot z_1, \quad w_2 = z_1 + z_2, \quad w_3 = z_1 \cdot z_2,$$

$$w_4 = \frac{1}{z_1}, \quad w_5 = z_1^2, \quad \text{ein } w_6 \text{ mit } w_6^2 = z_1.$$

(Sie brauchen nicht zu rechnen.)



Aufgabe 6 $(1 + 3 + 3 + 4 = 11$ Punkte)

Es soll ein tiefer Brunnen gebohrt werden. Die ersten 10 m kosten 10.000€. Die Bohrung der nächsten 10 m, also bis zu einer Tiefe von 20 m, kostet 20% mehr als der erste 10 m-Abschnitt. Entsprechend kostet jeder weitere 10 m-Abschnitt 20% mehr als der vorherige.

a) Wieviel kostet der dritte Abschnitt?

b) Seien K_n die Kosten des n-ten Abschnitts. Geben Sie

  b1) eine rekursive Formel

  b2) eine direkte Berechnungsvorschrift

  für K_n an.

c) Ab dem wievielten Bauabschnitt sind die Kosten pro Abschnitt größer als 50.000€?

  (Ein formelmäßiger Ausdruck reicht.)

d) Wie teuer ist eine 200 m-tiefe Bohrung?

  (Ein vereinfachter formelmäßiger Ausdruck ohne Summensymbol reicht.)

Aufgabe 7 ($4 + 6 = 10$ Punkte)

Ein See der Länge l steht auf Grund der Erdkrümmung in der Mitte gegenüber der direkten Verbindungslinie der Uferpunkte über. Für die Höhe h gilt dabei

$$h \;=\; R - R \cdot \cos \frac{l}{2R},$$

wobei $R \approx 6370\,\mathrm{km}$ der Erdradius ist.

a) Geben Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung vom Cosinus eine approximative Formel für kleine l an.

b) Wieviel steht der Hangeweiher (Durchmesser ca. 100m) über? Nutzen Sie a) und geben Sie den numerischen Wert mit passender Einheit näherungsweise an. (Ergebnisse im Bereich von $\pm 20\%$ des exakten Ergebnisses werden als richtig gewertet.)

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Sei $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass für $x_0 \neq 0$ gilt: $f'(x_0) = \dfrac{-2}{{x_0}^3}$.

(Tipp: Nutzen Sie die h-Version des Differenzenquotienten.)

Aufgabe 9 (maximal 9, minimal 0 Punkte)

Kreuzen Sie an, welchem Ausdruck die jeweils oben angegebene Ableitung entspricht bzw. ob es keine Entsprechung gibt.

(Die Gleichheit soll für alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gelten, bei denen die Ausdrücke sinnvoll sind.)

Jeder richtige Eintrag zählt +1.5 Punkte, jeder falsche −1.5; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

$\big(f(cx)\big)' =$	
$f'(cx)$	
$cf'(x)$	
$cf'(cx)$	
keines davon	

$f'(x) =$	
$\big(f(x)+c\big)'$	
$\big(f(x+c)\big)'$	
$\big(f(x+c)-c\big)'$	
keines davon	

$\big(f(x^2)\big)' =$	
$f'(2x)$	
$\big(f(x)^2\big)'$	
$\big(f'(x)\big)^2$	
keines davon	

$\big(e^f\big)' =$	
e^f	
e^{f-1}	
$e^{f'}$	
keines davon	

$\big(\ln(c \cdot f)\big)' =$	
$\ln c \cdot \big(\ln f\big)'$	
$c \cdot \big(\ln f\big)'$	
$\big(\ln f\big)'$	
keines davon	

$\big(f \circ f\big)' =$	
$2f \cdot f'$	
$(f' \circ f) \cdot f'$	
$f' \circ f'$	
keines davon	

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

13.03.2020

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *kein Taschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 08.04. statt.
Ggf. notwendige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 15.04. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 8 Aufgaben (Aufgabe 10 - Aufgabe 17) in gut leserlichem Druck vorliegen.

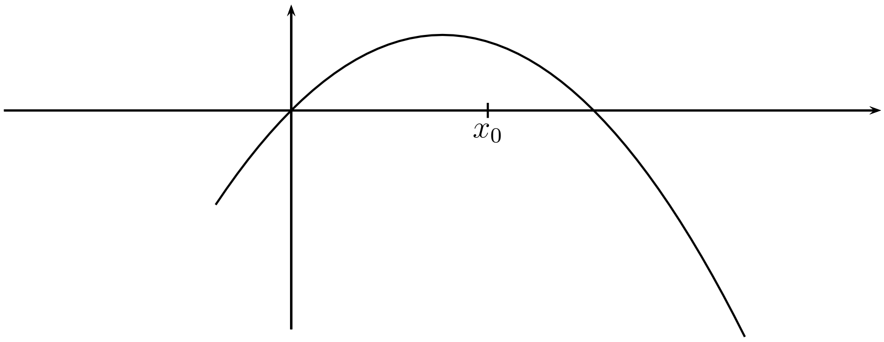
(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	10	11	12	13	14	15	16	17	Σ_2
Max	7	14	8	8	12	14	9	8	80
Ist									

Aufgabe 10 $(2 + 5 = 7$ Punkte)

a) Skizzieren Sie näherungsweise die Lage von x_1 und x_2 bei Durchführung des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle der abgebildeten Funktion ausgehend von x_0.



b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

ausgehend von $x_0 = 1$ durch.

Aufgabe 11 $(3 + 3 + 4 + 4 = 14$ Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

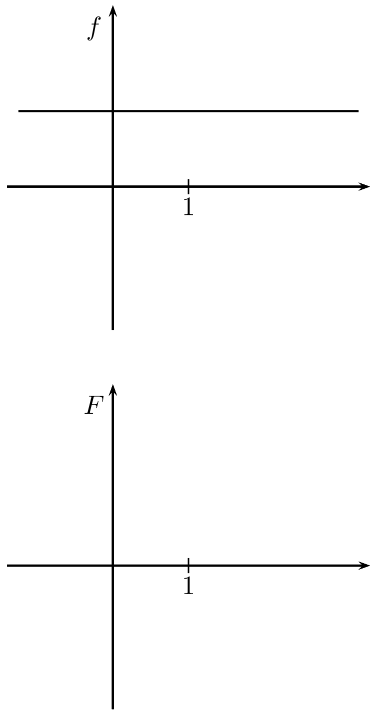
Aufgabe 12 (8 Punkte)

Skizzieren Sie in den unteren Koordinatensystemen jeweils die Flächenfunktion

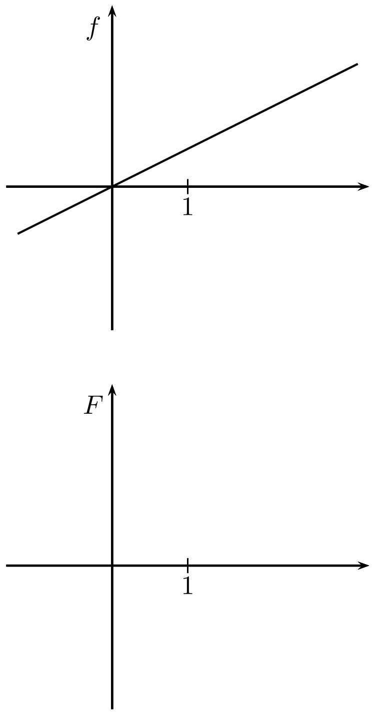
$$F(x) \;=\; \int\limits_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

zu der oben abgebildeten Funktion. (Sie brauchen nicht zu rechnen.)

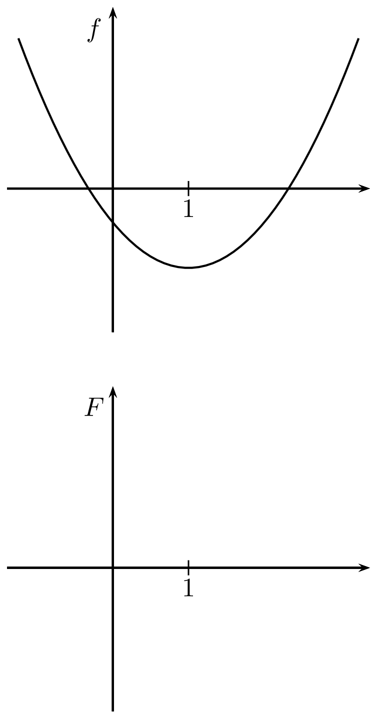
a)



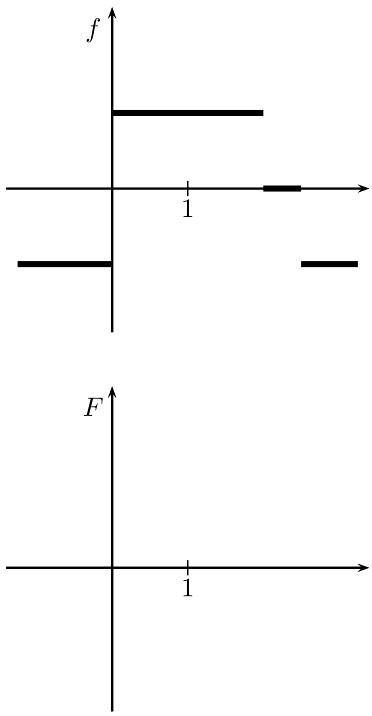
b)



c)



d)



Aufgabe 13 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

Kann man den Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der entsprechend aufgeführten Vektoren $\vec{v_i}$ darstellen?
Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.
Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

		geht	geht nicht
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		

Aufgabe 14 (12 Punkte)

Ein Schiff will in ost-süd-östliche Richtung fahren, genauer bezüglich eines entsprechenden Koordinatensystems in Richtung $\binom{2}{-1}$. Seine Höchstgeschwindigkeit beträgt 5 Knoten. Die Geschwindigkeit der Meeresströmung, mit der das Schiff abtreibt, ist (in Knoten) $\binom{1}{2}$.

In welche Richtung muss das Schiff steuern, damit es (mit der Meeresströmung zusammen) seinen anvisierten Kurs hält und möglichst schnell voran kommt?

Aufgabe 15 ($8 + 6 = 14$ Punkte)

Im folgenden ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Kennzeichnen Sie die genaue Bedeutung der Mal-Punkte bei den Termen in der Tabelle unten wie folgt (Die erste Zeile ist als Beispielzeile schon ausgefüllt.):

   $\cdot_1$: Reelle Zahl $\cdot_1$ reelle Zahl

   $\cdot_2$: Reelle Zahl $\cdot_2$ Vektor oder Vektor $\cdot_2$ Reelle Zahl

   $\cdot_3$: Vektor $\cdot_3$ Vektor (Skalarprodukt)

   $\cdot_4$: Reelle Zahl $\cdot_4$ Matrix oder Matrix $\cdot_4$ Reelle Zahl

   $\cdot_5$: Matrix $\cdot_5$ Vektor

   $\cdot_6$: Matrix $\cdot_6$ Matrix

b) Welche der Aussagen stimmt für alle $\lambda, a, b, c, d, A, B$?

   Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht
$(\lambda \cdot_2 a) \cdot_3 b = \lambda \cdot_1 (a \cdot_3 b)$	x	
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$		
$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = a \cdot \big((b \cdot c) \cdot d\big)$		
$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = a \cdot \big((d \cdot c) \cdot b\big)$		
$(A \cdot a) \cdot (B \cdot b) = A \cdot \big((a \cdot b) \cdot B\big)$		
$\big((\lambda \cdot A) \cdot a\big) \cdot b = \lambda \cdot \big((A \cdot a) \cdot b\big)$		
$\big((\lambda \cdot A) \cdot a\big) \cdot b = \lambda \cdot \big(A \cdot (a \cdot b)\big)$		

Aufgabe 16 ($5 + 4 = 9$ Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *idempotent* $:\Leftrightarrow \; A^2 = A$.

a) Wie müssen die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ -2 & d & c \end{pmatrix}$$

idempotent ist?

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass es entsprechende Parameter gibt.

b) Welche Werte kann die Determinante von A nur annehmen, wenn A idempotent ist?

(Hinweis: Hier geht es nicht speziell um die Matrix aus a) sondern allgemein um eine idempotente Matrix A.)

Aufgabe 17 (8 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$