FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

26.09.2019

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 1

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 17.10. ab 16 Uhr statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 23. oder 24.10. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 8 Aufgaben (Aufgabe 1 - Aufgabe 8) in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ_1	Σ_2	B.	Σ
Max	8	10	6	8	12	6	6	24	80	80	8	160+8

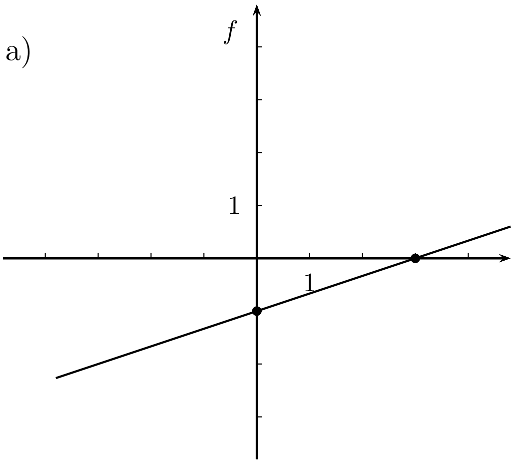
Note:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Geben Sie eine Funktionsvorschrift für die folgenden Geraden und Parabeln an!

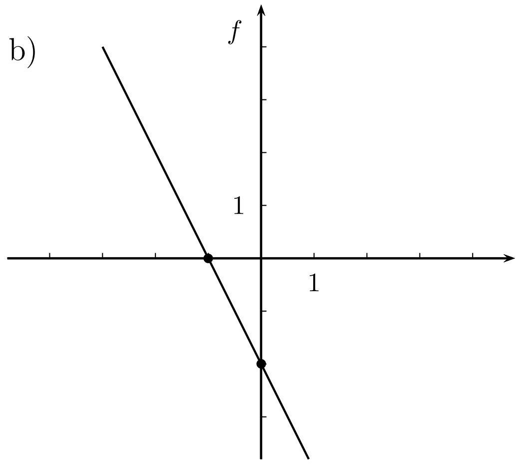
(Die markierten Punkte entsprechen jeweils ganzzahligen Koordinatenwerten.
Sie brauchen Ihre Aussage nicht zu begründen.)

a)



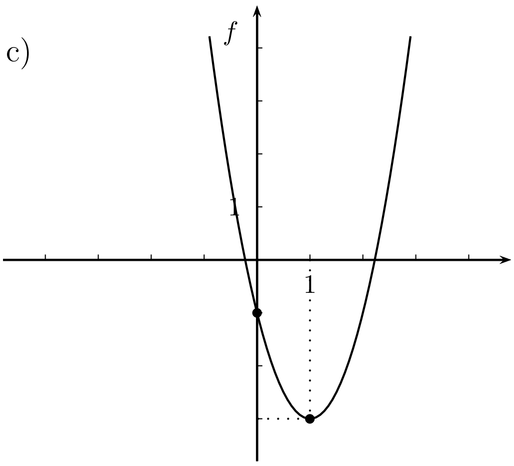
$f(x) =$

b)



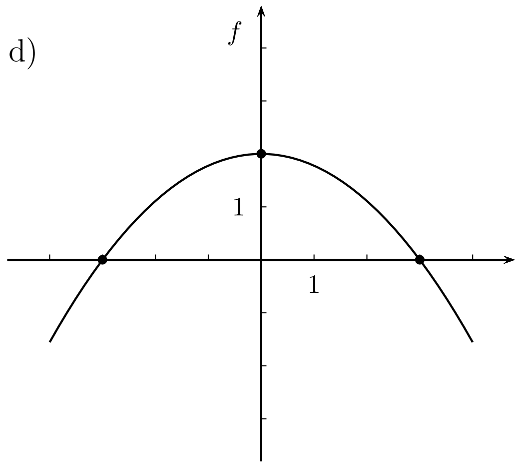
$f(x) =$

c)



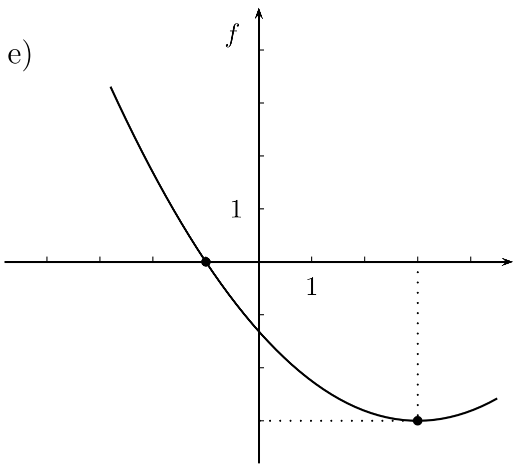
$f(x) =$

d)



$f(x) =$

e)



$f(x) =$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Auslenkung (in Abhängigkeit von der Zeit t) einer stark gedämpften Feder kann man beschreiben durch

$$f(t) \;=\; c \cdot e^{-at}$$

mit Parametern c und a.

Beobachtet wird bei einer konkreten Feder, dass die Auslenkung innerhalb von zwei Sekunden von 12cm auf 8cm abnimmt. Wie lange dauert es (ausgehend von der ersten Beobachtung) bis die Auslenkung nur noch 1cm beträgt?

(Ein formelmäßiger Ausdruck reicht.)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zerlegen Sie

$$p(x) \;=\; x^3 + 2x^2 - 11x + 6$$

in Linearfaktoren.

Tipp: $x = 2$ ist eine Nullstelle.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Seien

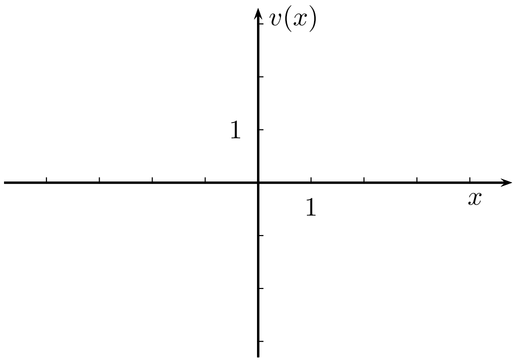
$$f(x) = \cos x,$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{und}$$

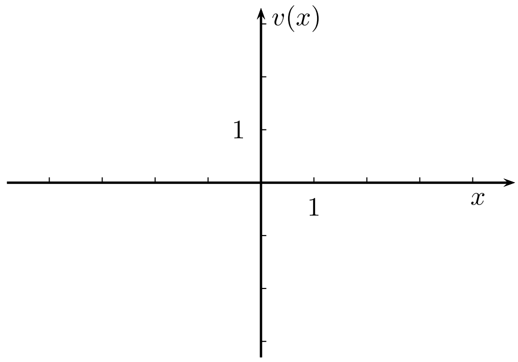
$$h(x) \text{ die Heaviside-Funktion: } h(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

Skizzieren Sie in den Koordinatensystemen die entsprechend angegebene Verkettung!

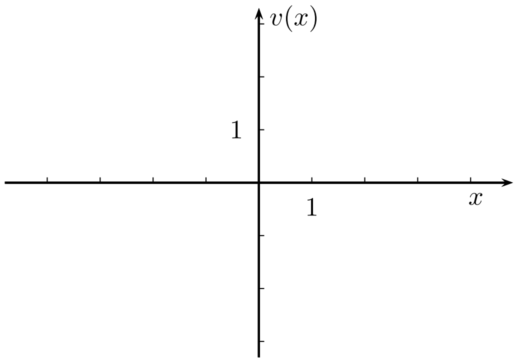
a) $v(x) \;=\; f \circ h(x)$



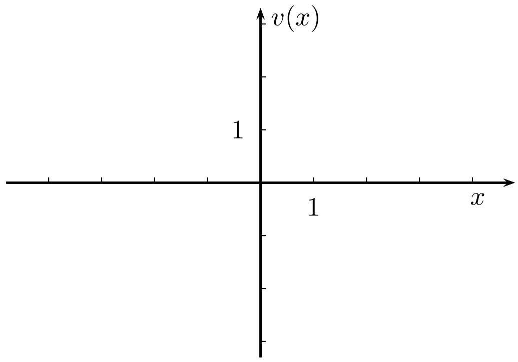
b) $v(x) \;=\; h \circ f(x)$



c) $v(x) \;=\; g \circ f(x)$



d) $v(x) \;=\; h \circ g(x)$



Aufgabe 5 (12 Punkte)

In der unten abgebildeten Gaußschen Zahlenebene sind zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 markiert.

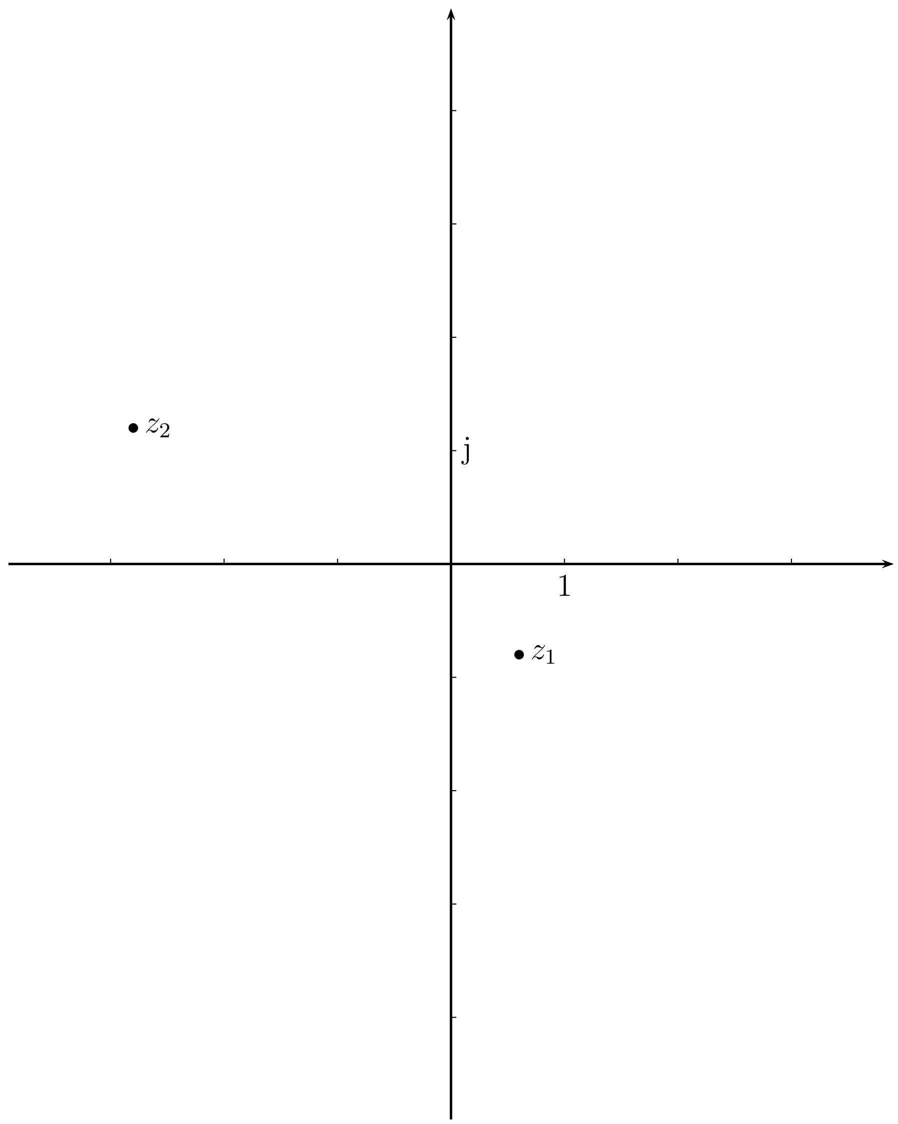
Skizzieren Sie in dem Bild, wo ungefähr die folgenden Zahlen liegen:

$$w_1 = 2 \cdot z_1, \quad w_2 = z_1 + z_2, \quad w_3 = z_1 \cdot z_2,$$

$$w_4 = \frac{1}{z_2}, \quad w_5 = z_1^2,$$

ein w_6 mit $w_6^2 = z_1$, ein w_7 mit $w_7^3 = z_2$.

(Sie brauchen nicht zu rechnen.)



Aufgabe 6 ($4 \times 1.5 = 6$ Punkte)

Geben Sie jeweils Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die die angegebenen Grenzwertbedingungen erfüllen.

a) $a_n \to \infty, \quad b_n \to \infty, \quad$ und $\quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 4$

$a_n \;=$ $\qquad\qquad\qquad$ $b_n \;=$

b) $a_n \to \infty, \quad b_n \to \infty, \quad$ und $\quad a_n - b_n \to -3$

$a_n \;=$ $\qquad\qquad\qquad$ $b_n \;=$

c) $a_n \to 0, \quad b_n \to \infty, \quad$ und $\quad a_n \cdot b_n \to -\infty$

$a_n \;=$ $\qquad\qquad\qquad$ $b_n \;=$

d) $a_n \to 0, \quad b_n \to 0, \quad$ und $\quad \dfrac{a_n}{b_n} \to -5$

$a_n \;=$ $\qquad\qquad\qquad$ $b_n \;=$

Aufgabe 7 (maximal 6, minimal 0 Punkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$?

Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	konvergiert	konv. nicht
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{4k-2}$		
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$		
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k^2+1)^2}$		
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$		
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$		
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{k^2}\right)$		

Aufgabe 8 $(12 + 6 + 6 = 24$ Punkte)

Sei

$$f_c : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad f_c(x) \; = \; x \cdot \ln(c \cdot x)$$

mit einem Parameter $c > 0$.

a) Sei hier $c = 1$.

   a1) Bestimmen Sie Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen sowie das Verhalten am Rand des Definitionsbereichs und skizzieren Sie die Funktion.

   a2) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

   Verwenden Sie dabei die Grenzwert-Schreibweise an der kritischen Grenze.

b) Zeigen Sie: Für jedes c führt die Tangente an die Funktion bei $x_0 = 1$ durch den Punkt $(0, -1)$.

(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

26.09.2019

Klausur zum Fach Mathematik 1
Teil 2

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel: ein (beidseitig) handbeschriebenes DinA4-Blatt, *keinTaschenrechner*

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 17.10. ab 16 Uhr statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 23. oder 24.10. statt.

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die obigen Klausurbedingungen gelesen habe, und dass alle 7 Aufgaben (Aufgabe 9 - Aufgabe 15) in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

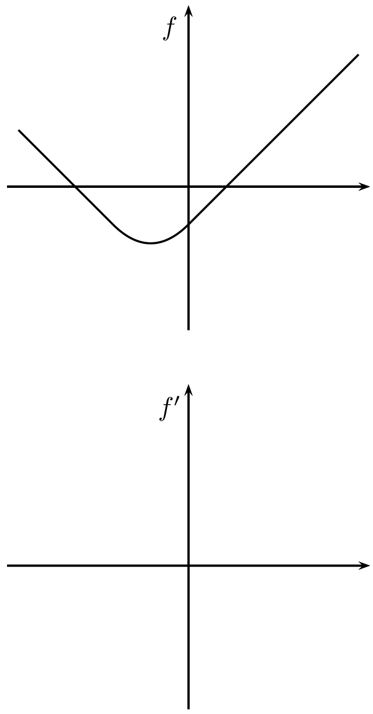
Viel Erfolg!

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	Σ_2
Max	8	10	13	8	17	14	10	80

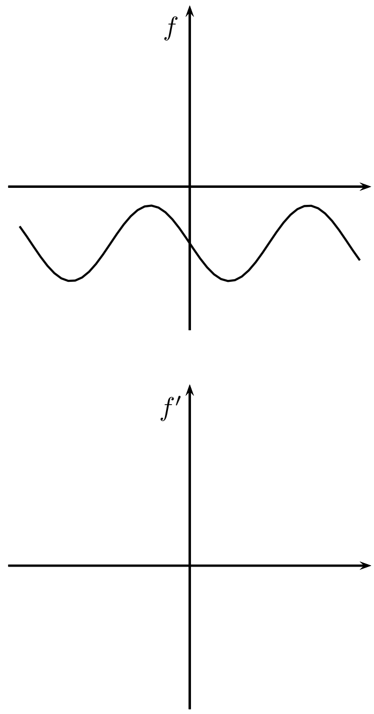
Aufgabe 9 (8 Punkte)

Skizzieren Sie in den unteren Koordinatensystemen jeweils die Ableitung zu der oben abgebildeten Funktion.

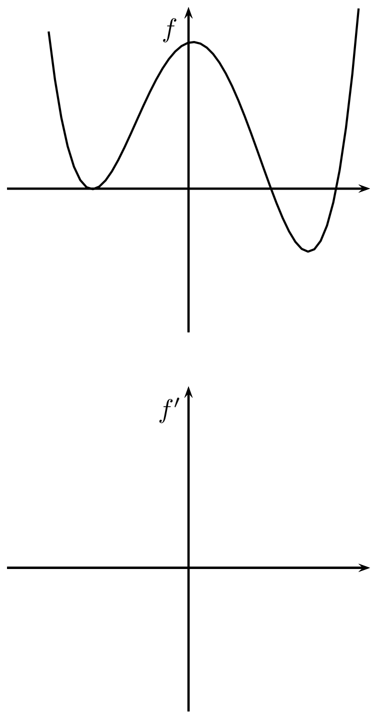
a)



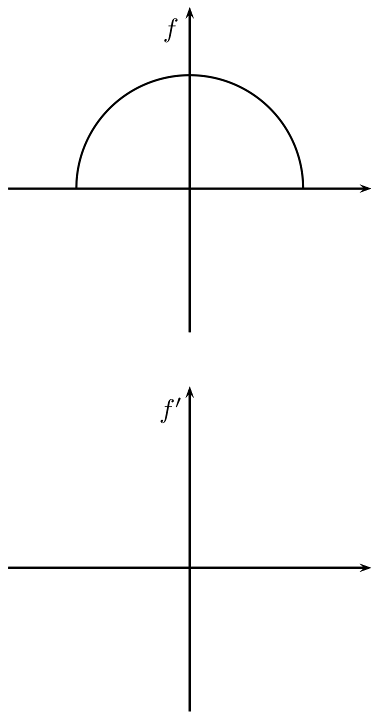
b)



c)



d)

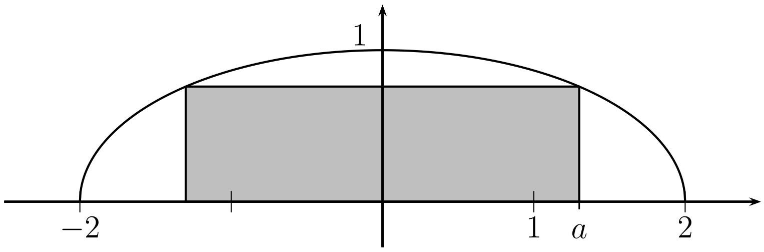


Aufgabe 10 (10 Punkte)

Für welche Stelle $a \geq 0$ wird die Fläche des Rechtecks unter dem Ellipsenbogen

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}, \quad x \in [-2, 2]$$

(s. Skizze) maximal?



Aufgabe 11 $(8 + 3 + 2 = 13$ Punkte)

Betrachtet wird $\int\limits_0^{\pi} \cos^2\left(2x\right)\,\mathrm{d}x$.

a) Geben Sie einen Näherungswert für das Integral an mittels einer Riemannschen Zwischensumme S mit den Intervall-Zerlegungspunkten

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \pi$$

und den Zwischenstellen (an denen der Funktionswert genommen wird)

$$\hat{x_1} = \frac{\pi}{6}, \quad \hat{x_2} = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{x_3} = \frac{5}{8}\pi.$$

b) Skizzieren Sie den Integranden und illustrieren Sie die Riemannsche Zwischensumme aus a).

c) Geben Sie den exakten Integralwert an. (Tipp: Symmetrieüberlegungen!)

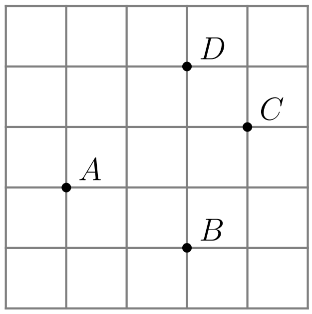
Aufgabe 12 (maximal 8, minimal 0 Punkte)

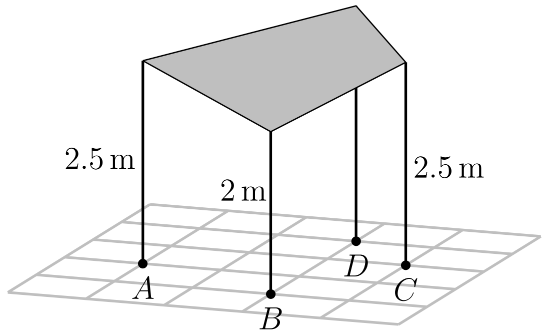
Kann man den Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der entsprechend aufgeführten Vektoren $\vec{v_i}$ darstellen?
Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.
Jeder richtige Eintrag zählt +1 Punkte, jeder falsche −1; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

		geht	geht nicht
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		

Aufgabe 13 $(10 + 3 + 4 = 17$ Punkte)

Max Mustermann will seine Terasse mit einem schrägen Dach beschatten Die Stützen sollen an den Stellen A, B, C und D (s. Skizze links mit 1 m-Raster) aufgestellt werden. Die Höhen bei A und C sollen 2.5 m und bei B 2 m sein (s. Skizze rechts).





a) Zeichnen Sie in die Abbildung rechts ein Koordinatensystem ein und geben sie entsprechend Ihres Koordinatensystems eine Parameter- und eine Normalendarstellung für die durch die Dachfläche gebildete Ebene E an.

b) Wie hoch muss die Stütze an der Stelle D sein, damit ein ebenes Dach passend aufliegt?

c) Bilden die Dachkanten an der Stütze bei B einen Winkel kleiner, gleich oder größer $90°$?

(Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 14 $(6 + 4 + 4 = 14$ Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *normal* $:\Leftrightarrow\ A \cdot A^T = A^T \cdot A$.

a) Sind

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

normal? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal und invertierbar, so ist auch A^{-1} normal.

c) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, so gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$||Ax|| \ = \ ||A^T x||.$$

(Tipp: Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt $||y||^2 = y^T \cdot y$.)

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$