

9. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Der Zustand

$$|\Phi\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8 \cdot |1\rangle$$

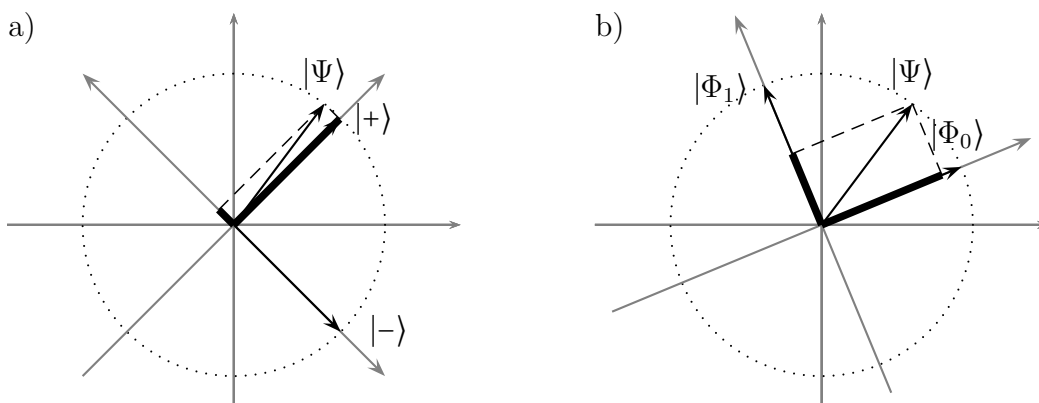
wird

- a) in der $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ -Basis,
- b) in einer gegenüber der Standard-Basis um 22.5° gedrehten Basis $\{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle\}$ gemessen.

Zeichnen Sie die Situation und schätzen Sie qualitativ ab, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man bei a) $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ bzw. bei b) $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$ misst.

Berechnen Sie anschließend diese Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:



- a) Entsprechend des Bilds ist zu erwarten, dass fast sicher $|+\rangle$ gemessen wird.

Die $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ -Basis wird durch die Hadamard-Transformation auf die Standardbasis überführt. Die Wahrscheinlichkeiten einer Messung von $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ sind also die

Wahrscheinlichkeiten von $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ bei einer Messung von

$$\begin{aligned} H|\Psi\rangle &= 0.6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + 0.8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{0.6+0.8}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{0.6-0.8}{\sqrt{2}}|1\rangle. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit von $|+\rangle$ ist also

$$\left(\frac{0.6+0.8}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1.4^2}{2} = 0.98,$$

und die Wahrscheinlichkeit von $|-\rangle$ ist

$$\left(\frac{0.6-0.8}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(-0.2)^2}{2} = 0.02.$$

- b) Entsprechend des Bilds ist zu erwarten, dass $|\Phi_0\rangle$ als Ergebnis wahrscheinlicher ist als $|\Phi_1\rangle$, aber beide Ergebnisse eine relevante Wahrscheinlichkeit haben.

Die $\{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle\}$ -Basis wird durch eine Rotation um $\alpha = -22.5^\circ$, also mit der Matrix $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ auf die Standardbasis überführt. Die Wahrscheinlichkeiten einer Messung von $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$ sind also die Wahrscheinlichkeiten von $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ bei einer Messung von

$$\begin{aligned} &0.6 \cdot (\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) + 0.8 \cdot (-\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \\ &= (0.6 \cos \alpha - 0.8 \sin \alpha) |0\rangle + (0.6 \sin \alpha + 0.8 \cos \alpha) |1\rangle \\ &\approx 0.86 |0\rangle + 0.51 |1\rangle. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit von $|\Phi_0\rangle$ ist also ca. $0.86^2 = 0.74$, die von $|\Phi_1\rangle$ ist ca. $0.51^2 = 0.26$.

Aufgabe 2

Betrachtet wird einerseits das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ und andererseits das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

Ziel ist die Analyse, was jeweils passiert, wenn das Bell-Paar in einer um den Winkel α gedrehten Basis gemessen wird. Führen Sie dazu jeweils die folgenden Schritte durch.

- Führen Sie auf dem ersten Qubit eine Rotation um $-\alpha$, also mit der Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, durch.
- Beim aus a) resultierende Zustand wird nun das erste Qubit in der Standardbasis gemessen. Wie wahrscheinlich sind die Ergebnisse $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?
- In welchen Zustand kollabiert das Paar, wenn bei b) das Ergebnis $|0\rangle$ gemessen wird?

- d) Führen Sie auf dem Zustand von c) auf dem zweiten Qubit eine Rotation um $-\alpha$ durch.
- e) Beim aus d) resultierende Zustand wird nun das zweite Qubit in der Standardbasis gemessen. Wie wahrscheinlich sind die Ergebnisse $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?

Lösung:

Zunächst werden die Betrachtungen für $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ durchgeführt:

- a) Man erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) \otimes |0\rangle + (\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \otimes |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \alpha \cdot |00\rangle - \sin \alpha \cdot |10\rangle + \sin \alpha \cdot |01\rangle + \cos \alpha \cdot |11\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) + |1\rangle \otimes (-\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \right). \end{aligned}$$

- b) Aus der Darstellung von a) sieht man, dass man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2}$$

erhält.

- c) Beim Ergebnis $|0\rangle$ kollabiert der Zustand zu

$$\frac{1}{\sqrt{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) = |0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle).$$

- d) Man erhält

$$\begin{aligned} & |0\rangle \otimes (\cos \alpha (\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) + \sin \alpha (\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle)) \\ &= |0\rangle \otimes (\cos^2 \alpha |0\rangle - \cos \alpha \sin \alpha |1\rangle + \sin^2 \alpha |0\rangle + \sin \alpha \cos \alpha |1\rangle) \\ &= |00\rangle. \end{aligned}$$

- e) Man erhält garantiert $|0\rangle$.

Nun werden die Betrachtungen für $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ durchgeführt:

- a) Man erhält

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) \otimes |0\rangle - (\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \otimes |0\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \alpha \cdot |00\rangle - \sin \alpha \cdot |10\rangle - \sin \alpha \cdot |01\rangle + \cos \alpha \cdot |11\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) + |1\rangle \otimes (-\sin \alpha |0\rangle - \cos \alpha |1\rangle) \right). \end{aligned}$$

b) Aus der Darstellung von a) sieht man, dass man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{2}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2}$$

erhält.

c) Beim Ergebnis $|0\rangle$ kollabiert der Zustand zu

$$\frac{1}{\sqrt{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) = |0\rangle \otimes (\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle).$$

d) Man erhält

$$\begin{aligned} & |0\rangle \otimes (\cos \alpha (\cos \alpha |0\rangle - \sin \alpha |1\rangle) - \sin \alpha (\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle)) \\ &= |0\rangle \otimes (\cos^2 \alpha |0\rangle - \cos \alpha \sin \alpha |1\rangle - \sin^2 \alpha |0\rangle - \sin \alpha \cos \alpha |1\rangle) \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) |0\rangle - 2 \sin \alpha \cos \alpha |1\rangle. \end{aligned}$$

e) Man erhält $|0\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2$ und $|1\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$.

Fazit: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ist in allen Basen perfekt korreliert, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ nicht. Man kann entsprechend zeigen, dass $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ in allen Basen perfekt korreliert ist, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ nicht.

Aufgabe 4

Alice und Bob führen einen Quantenschlüsselaustausch nach dem BB84-Protokoll aus.

Sie vereinbaren

$$\text{—} = 0, \quad | = 1, \quad / = 0, \quad \backslash = 1.$$

Alice wählt als Bitfolge

0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1

und als Basen

+ × + × × × + + × + + × .

Bob wählt als Basen

+ + × × × + + + × + × + .

a) Wie sehen die übertragenen Qubits aus?

Was erhält Bob? Wählen Sie zufällig einen Fall (würfeln Sie!), wenn das Messergebnis nicht eindeutig ist.

Welche Bits werden nach dem Basenabgleich verworfen, welche Bitfolgen bleiben bei Alice und Bob übrig?

b) Während der Übertragung misst Eve die Qubits in den Basen

+ × × + × × + × × × ++

und sendet die gemessenen Qubits weiter.

Was misst Eve und was erhält Bob? Wählen Sie zufällig einen Fall (würfeln Sie!), wenn das Messergebnis nicht eindeutig ist.

Wie groß ist die Fehlerrate unter den von Bob und Alice nach dem Basen-Abgleich nicht verworfenen Bits?

Lösung:

a) Übertragen werden

— / | / \ \ — — / | — \ .

Bob erhält

— | / / \ — — — / | \ |,

wobei die grauen Symbole zufällig gewürfelt sind.

Genau die Bits zu den grauen Symbolen werden verworfen, so dass die gemeinsame Bitfolge 0 0 1 0 0 0 1 ist.

b) Eve erhält

— / / | \ \ — \ / / — |.

wobei die grauen Symbole zufällig gewürfelt sind.

Bob erhält

— | / \ \ | — — / | / |.

wobei die hellgrauen Symbole dabei zufällig gewürfelt sind.

Alice und Bob behalten nur das 1., 4., 5., 7., 8., 9. und 10. Bit, also

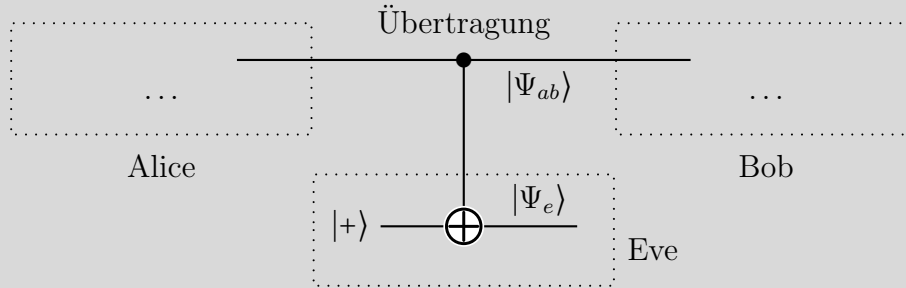
bei Alice: — / \ — — / |,

bei Bob: — \ \ — — / |,

Die Fehlerrate ist in diesem Fall $\frac{1}{7}$.

Aufgabe 5

Analysieren Sie die Situation eines Horchers beim BB84-Protokoll, der wie in der Abbildung gezeigt ein eigenes Qubit mit $|+\rangle$ initialisiert und dann mit einem CNOT-Gatter mit dem übertragenen Qubit verknüpft.



Lösung:

Wie in Aufgabe 10, Blatt 3, überlegt, ändert sich $|+\rangle$ als Ziel-Bit eines CNOT-Gatters nicht: Das von Alice gesendete $|\Psi_{ab}\rangle$ bleibt unverändert und es ist $|\Psi_e\rangle = |+\rangle$. Damit entstehen keine Bitfehler zwischen Alice und Bob, so dass sie den Horcher nicht entdecken können. Allerdings hat Eve auch überhaupt keine Information durch die Ankopplung bekommen, da in jedem Fall $|\Psi_e\rangle = |+\rangle$ ist.

Aufgabe 6 (doppelte Punktzahl)

Ziel der Aufgabe ist die Ermittlung der Fehlerwahrscheinlichkeit, die Alice und Bob bei einem Quantenschlüsselaustausch bei denjenigen Bits feststellen, bei denen sie die gleiche Basis genutzt haben, wenn sich Eve dazwischenschaltet und die übertragenen Qubits in einer $\{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle\}$ -Basis misst, die gegenüber der Standard-Basis um den Winkel α gedreht ist, und die gemessenen Werte weiter sendet. Dabei sei $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst Eve $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$, wenn Alice $|0\rangle$ sendet?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Bob $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, wenn Eve $|\Phi_0\rangle$ an ihn sendet und Bob in der Standard-Basis misst.
- Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass Bob $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ misst, wenn Eve $|\Phi_1\rangle$ an ihn sendet und Bob in der Standard-Basis misst.
- Berechnen Sie mit den Ergebnissen von a) bis c) die Wahrscheinlichkeit, dass Bob und Alice in der beschriebenen Situation einen Bitfehler feststellen, wenn Alice $|0\rangle$ sendet.

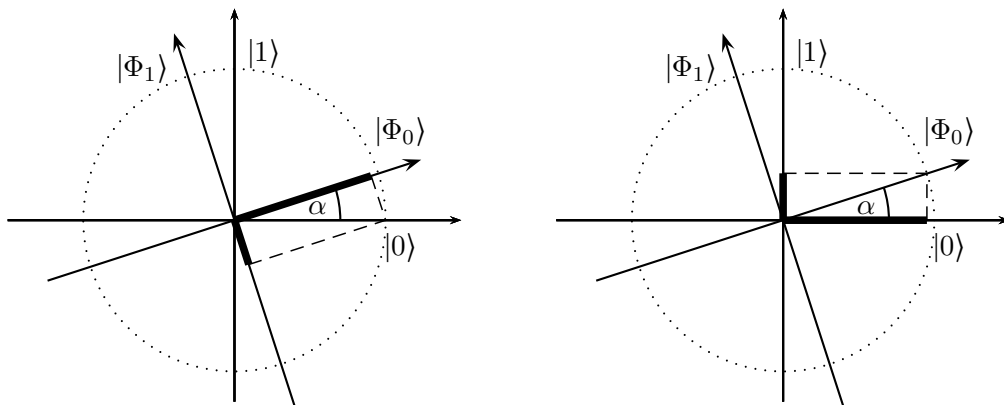
- e) Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen, um die Wahrscheinlichkeit zu angeben, dass Bob und Alice in der beschriebenen Situation einen Bitfehler feststellen, wenn Alice $|1\rangle$ sendet.
- f) Wie müssen die Wahrscheinlichkeits-Formeln angepasst werden, um die entsprechenden Bitfehler-Wahrscheinlichkeiten anzugeben, wenn Alice $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ sendet?
- g) Welche Bitfehler-Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn Alice zufällig zwischen $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$ und $|-\rangle$ auswählt?

Nutzen Sie Additionstheoreme/Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen, um den Ausdruck zu vereinfachen.

Zusatzaufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Eve das gleiche Bit erhält wie Alice (bei zufälliger Basis-Auswahl, der Standard-Zuordnung der Bits und der Zuordnung von $|\Phi_0\rangle$ zu 0 und $|\Phi_1\rangle$ zu 1)?

Lösung:

- a) Wie man im Bild unten links sieht, ergeben die Projektionen von $|0\rangle$ auf $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$ die Längen $\cos \alpha$ bzw. $\sin \alpha$; Die Wahrscheinlichkeiten für $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$ sind also $\cos^2 \alpha$ bzw. $\sin^2 \alpha$.



- b) Wie man im Bild oben rechts sieht, ergeben sich ähnlich die Wahrscheinlichkeiten für $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ als $\cos^2 \alpha$ bzw. $\sin^2 \alpha$.
- c) Aus Symmetriegründen erhält Bob $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ mit den Wahrscheinlichkeiten für $\sin^2 \alpha$ bzw. $\cos^2 \alpha$.
- d) Ein Bitfehler entsteht, wenn Bob $|1\rangle$ misst. Dies kann in zwei Fällen passieren:
1. Eve misst $|\Phi_0\rangle$ (Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \alpha$), sendet $|\Phi_0\rangle$ weiter, was Bob als $|1\rangle$ misst (Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \alpha$).
Insgesamt hat dieser Fall also die Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.
 2. Eve misst $|\Phi_1\rangle$ (Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \alpha$), sendet $|\Phi_1\rangle$ weiter, was Bob als $|1\rangle$

misst (Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \alpha$).

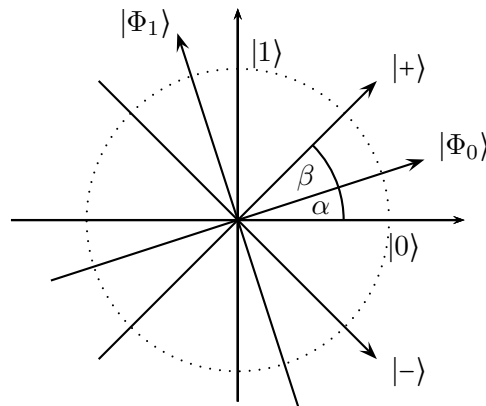
Insgesamt hat dieser Fall also die Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$, also der gleiche Wert wie beim ersten Fall.

Als Gesamtwahrscheinlichkeit erhält man in Summe $2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$.

e) Aus Symmetriegründen ist die Gesamtwahrscheinlichkeit die gleiche wie bei d), also $2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$

f) Die Situation ist wie bei a) bis e) allerdings mit dem Winkel $\beta = 45^\circ - \alpha$. Die Bitfehler-Wahrscheinlichkeiten sind also jeweils

$$2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta = 2 \cos^2(45^\circ - \alpha) \sin^2(45^\circ - \alpha).$$



g) Jeder der Fälle $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$ und $|-\rangle$ kommt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ vor. Damit ist die Bitfehler-Wahrscheinlichkeit p_{BF}

$$\begin{aligned} p_{\text{BF}} &= \frac{1}{4} \left(2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos^2(45^\circ - \alpha) \sin^2(45^\circ - \alpha) + 2 \cos^2(45^\circ - \alpha) \sin^2(45^\circ - \alpha) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 4 \cos^2(45^\circ - \alpha) \sin^2(45^\circ - \alpha) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((2 \cos \alpha \sin \alpha)^2 + (2 \cos(45^\circ - \alpha) \sin(45^\circ - \alpha))^2 \right). \end{aligned}$$

Wegen $2 \cos x \sin x = \sin(2x)$ und $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ erhält man weiter

$$\begin{aligned} p_{\text{BF}} &= \frac{1}{4} \left((\sin(2\alpha))^2 + (\sin(2 \cdot (45^\circ - \alpha)))^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sin^2(2\alpha) + \sin^2(90^\circ - 2\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe: Aus Symmetriegründen reicht es, den Fall zu betrachten, dass Alice das 0-Bit, also $|0\rangle$ bzw. $|+\rangle$ sendet. Die Wahrscheinlichkeiten, dass Eve dann $|\Phi_0\rangle$ misst, sind

$\cos^2 \alpha$ (s. a)) bzw. $\cos^2 \beta$ (mit $\beta = 45^\circ - \alpha$, analog zu f)). Wenn Alice ihre Basen zufällig wählt, ist die Gesamtwahrscheinlichkeit p_0

$$p_0 = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \alpha + \cos^2(45^\circ - \alpha) \right).$$

Für $\alpha = 0$ erhält man $p_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = \frac{3}{4}$. Man kann sich überlegen, dass dieser Wert mit wachsendem α ansteigt bis er bei $\alpha = 22.5^\circ$ maximal wird mit Wert $\cos^2(22.5^\circ) \approx 0.85$.