FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

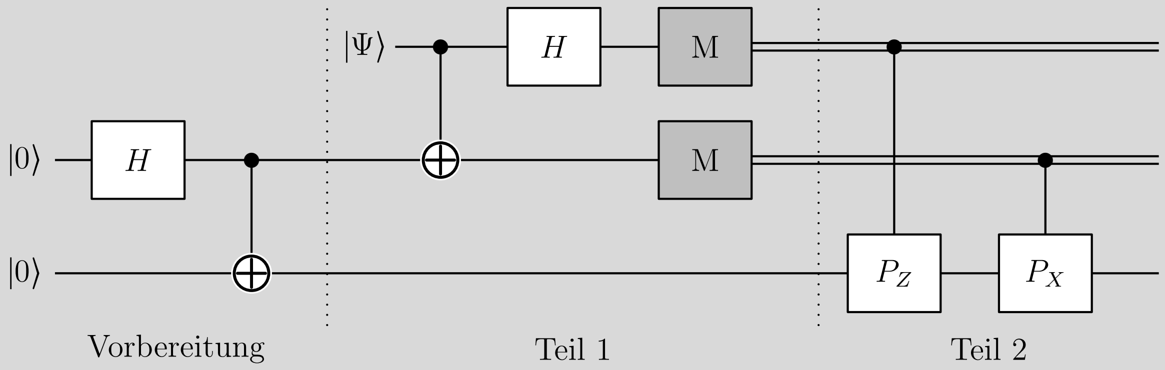
Prof. Georg Hoever

SS 2025
21.05.2025

8. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Analysieren Sie die folgende Variante des Teleportationsalgorithmus, bei dem in Teil 2 die Reihenfolge der kontrollierten P_X- und P_Z-Gatter vertauscht ist.



In welchem Zustand ist (ggf. abhängig von den Messergebnissen) am Ende das unterste Qubit?

Lösung:

Für die Fälle, dass höchstens ein Gatter schaltet, ist die Reihenfolge irrelevant, d.h. am Ende ist wie bei der normalen Teleportation das unterste Qubit im Zustand $|\Psi\rangle$.

Bleibt der Fall, dass beide Messungen 1 ergeben:

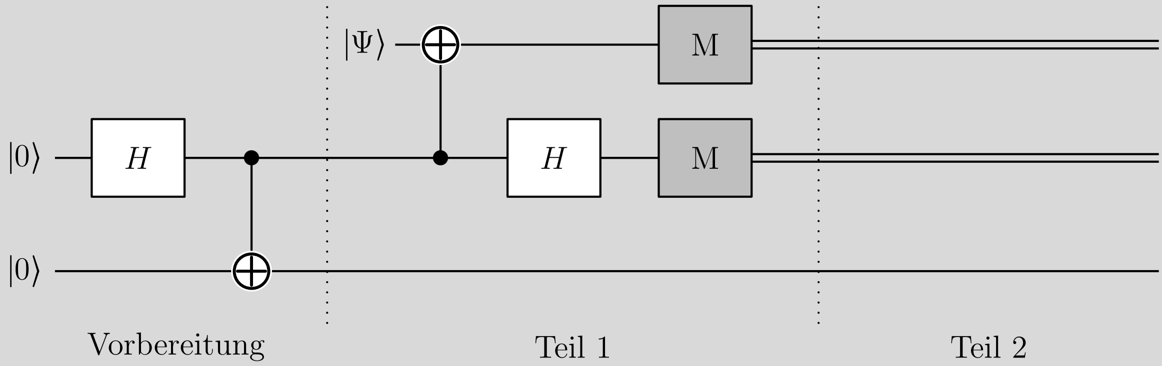
Bei $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ ist der gemeinsame Zustand der drei Qubits vor der Messung wie im Skript hergeleitet

$$\frac{1}{2}\Big(|00\rangle \otimes \big(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\big) + |01\rangle \otimes \big(\beta\,|0\rangle + \alpha\,|1\rangle\big) \\ + |10\rangle \otimes \big(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle\big) + |11\rangle \otimes \big(-\beta\,|0\rangle + \alpha\,|1\rangle\big)\Big).$$

Bei der Messung von $|11\rangle$ kollabiert das letzte Qubits in den Zustand $-\beta\,|0\rangle + \alpha\,|1\rangle$. Das P_Z-Gatter führt dann zu $-\beta\,|0\rangle - \alpha\,|1\rangle$ und das P_X-Gatter dann zu $-\beta\,|1\rangle - \alpha\,|0\rangle = -\,|\Psi\rangle$.

Aufgabe 2

Analysieren Sie die folgende Variante des Teleportationsalgorithmus, bei dem in Teil 1 das CNOT-Gatter mit vertauschtem Kontroll- und Ziel-Qubit durchgeführt wird und die Hadamard-Transformation nicht auf das erste sondern auf das zweite Qubit angewendet wird.



a) Welche Messergebnisse sind mit welchen Wahrscheinlichkeiten möglich, und in welchen Zustand kollabiert dann jeweils das dritte Qubit.

b) Wie kann man im Teil 2 kontrollierte Gatter nutzen, damit am Ende das unterste Qubit in einem Zustand ist, wie es $|\Psi\rangle$ zu Beginn war.

Lösung:

a) Eine Analyse ähnlich wie bei der normalen Teleportation führt zu folgenden Zuständen:

Nach der Vorbereitung sind die unteren beiden Qubits das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle+|11\rangle\big)$. Mit $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ sind die drei Qubits also im Zustand

$$\begin{aligned}&\big(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\big) \otimes \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)\Big)\\ =\ & \tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|100\rangle + \tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|011\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|111\rangle\,.\end{aligned}$$

Durch das CNOT-Gatter mit dem zweiten Qubit als Kontroll-Qubit und dem ersten als Ziel-Qubit wird dies zu

$$\tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|000\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|100\rangle + \tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|111\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|011\rangle\,.$$

Durch die Haramard-Transformation angewendet auf das zweite Bit wird dadurch

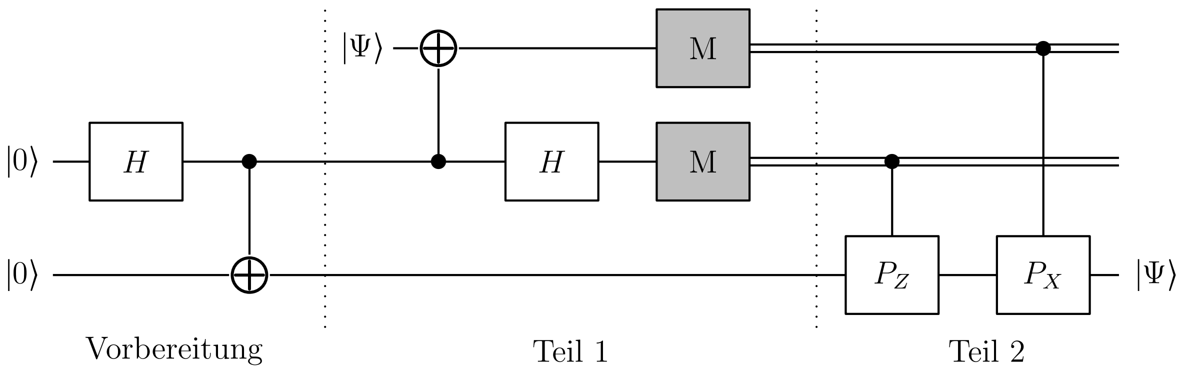
$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \otimes \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\Big) \otimes |0\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|1\rangle \otimes \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\Big) \otimes |0\rangle \\
&\quad + \tfrac{\alpha}{\sqrt{2}}\,|1\rangle \otimes \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\Big) \otimes |1\rangle + \tfrac{\beta}{\sqrt{2}}\,|0\rangle \otimes \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\Big) \otimes |1\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|010\rangle + \beta\,|100\rangle + \beta\,|110\rangle \\
&\quad + \alpha\,|101\rangle - \alpha\,|111\rangle + \beta\,|001\rangle - \beta\,|011\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\,|00\rangle \otimes \big(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,\big) + |01\rangle \otimes \big(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle\,\big) \\
&\quad + |10\rangle \otimes \big(\beta\,|0\rangle + \alpha\,|1\rangle\,\big) + |11\rangle \otimes \big(\beta\,|0\rangle - \alpha\,|1\rangle\,\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Die Messung der ersten beiden Qubits ergibt also die Zustände $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ oder $|11\rangle$ mit jeweils gleichen Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$. Dabei kollabiert das dritte Qubit jeweils wie folgt:

1. Fall: Messung von $|00\rangle$: $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$,
2. Fall: Messung von $|01\rangle$: $\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle$,
3. Fall: Messung von $|10\rangle$: $\beta\,|0\rangle + \alpha\,|1\rangle$,
4. Fall: Messung von $|11\rangle$: $\beta\,|0\rangle - \alpha\,|1\rangle$.

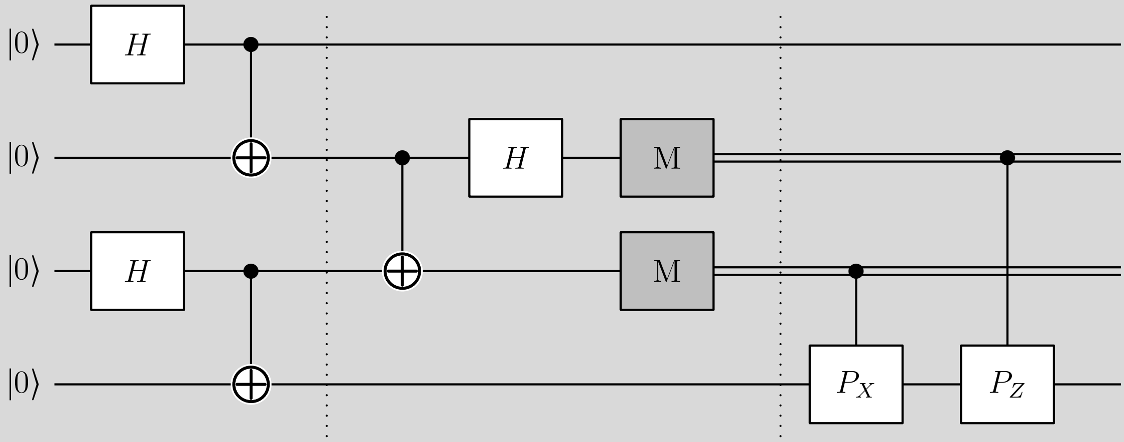
b) Ist die zweite Messung 1, so muss die Amplitude von $|1\rangle$ mit -1 multipliziert werden (P_Z-Gatter). Ist die erste Messung 1, so müssen (ggf. anschließend) $|0\rangle$ und $|1\rangle$ vertauscht werden (P_X-Gatter).

Damit erhält man folgenden Schaltkreis zur Teleportation:



Aufgabe 3

a) In welchem Zustand sind erstes und letztes Qubit (als 2-Qubit-System) am Ausgang des Schaltkreises (ggf. abhängig von den Messergebnissen)?



b) Wie kann man das, was im Schaltkreis von a) passiert, interpretieren?

Lösung:

a) Durch die Vorbereitung werden zwei Bell-Paare erzeugt. Damit ist der Gesamtzustand bei der ersten gestrichelten Linie

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle + |1111\rangle\big).\end{aligned}$$

Nach dem CNOT-Gatter wird dies zu

$$|\Psi_0\rangle = \tfrac{1}{2}\big(|0000\rangle + |0011\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle\big).$$

Durch das Hadamard-Gatter wird dies zu

$$\begin{aligned}|\Psi_1\rangle &= \tfrac{1}{2}\Big(|0\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |00\rangle \quad + \quad |0\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |11\rangle\\ &\qquad + \quad |1\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |10\rangle \quad + \quad |1\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |01\rangle\Big)\\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big(|0000\rangle + |0100\rangle \quad + \quad |0011\rangle + |0111\rangle\\ &\qquad + \quad |1010\rangle - |1110\rangle \quad + \quad |1001\rangle - |1101\rangle\big).\end{aligned}$$

Bei der Messung der mittleren beiden Qubits kommen alle Fälle $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ und $|11\rangle$ gleich wahrscheinlich vor. Für die äußeren beiden Qubits ergibt sich jeweils

- falls $|00\rangle$ gemessen wird: $\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$,
- falls $|01\rangle$ gemessen wird: $\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big)$,

- falls $|10\rangle$ gemessen wird: $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle - |11\rangle\,\big)$,
- falls $|11\rangle$ gemessen wird: $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle - |10\rangle\,\big)$.

Im letzten Teil erhält man

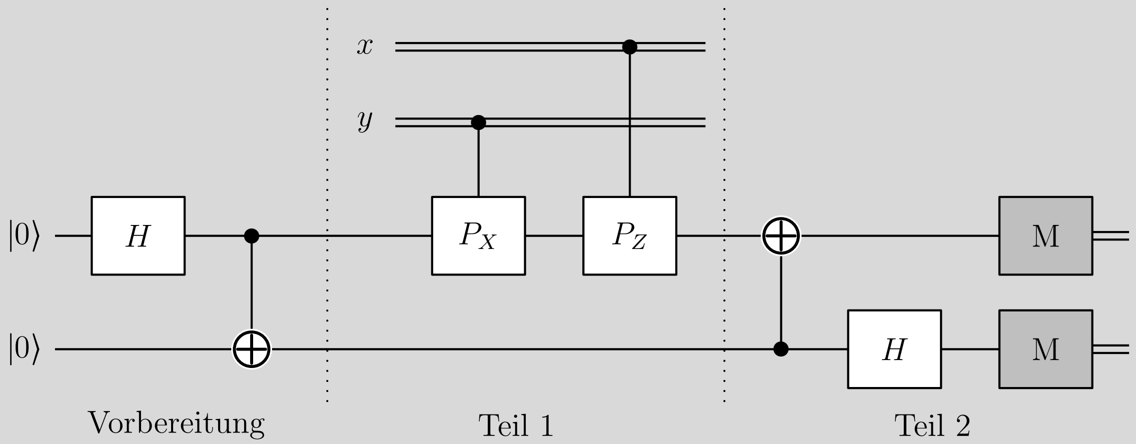
- bei Messung $|00\rangle$: keine Modifikation; der Zustand bleibt $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$,
- bei Messung $|01\rangle$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle + |10\rangle\,\big) \overset{P_X}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$,
- bei Messung $|10\rangle$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle - |11\rangle\,\big) \overset{P_Z}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$,
- bei Messung $|11\rangle$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle - |10\rangle\,\big) \overset{P_X}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle - |11\rangle\,\big) \overset{P_Z}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.

Man erhält also in jedem Fall den Bell-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.

b) Man teleportiert die Verschränkung.

Aufgabe 4

Analysieren Sie die folgende Variante der dichten Codierung, bei dem in Teil 2 das CNOT- und Hadamard-Gatter „gespiegelt“ sind.



Lösung:

Für die vier verschiedenen Möglichkeiten für x und y sind im Folgenden jeweils die Zustände der beiden Qubits nach der Vorbereitung (dort immer das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\big)$), nach Teil 1, nach dem CNOT-Gatter und vor der Messung dargestellt.

1. Fall: $x = 0$ und $y = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\big) \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big) \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |01\rangle\,\big) \;=\; |0\rangle \otimes |+\rangle \;\mapsto\; |00\rangle\,.$$

2. Fall: $x = 0$ und $y = 1$.

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|10\rangle + |01\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|10\rangle + |11\rangle\big) \;=\; |1\rangle \otimes |+\rangle \;\mapsto\; |10\rangle\,.$$

3. Fall: $x = 1$ und $y = 0$.

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |01\rangle\big) \;=\; |0\rangle \otimes |-\rangle \;\mapsto\; |01\rangle\,.$$

4. Fall: $x = 1$ und $y = 1$.

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(-|10\rangle + |01\rangle\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(-|10\rangle + |11\rangle\big) \;=\; -|1\rangle \otimes |-\rangle \;\mapsto\; -|11\rangle\,.$$

Bei der Messung spielt das Vorzeichen (insbes. das „–“ im 4. Fall) keine Rolle. Man erhält also nach der Messung die ursprünglichen Bits, allerdings in anderer Reihenfolge.