

## 7. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

### Aufgabe 1

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für  $N = 16$ .

Berechnen Sie numerisch (mit einem Taschenrechner, einer Tabellenkalkulation oder einem kleinen Programm), welche Amplituden das gesuchte Element bzw. die anderen Elemente zu Beginn und dann nach ein bis sechs Schritten von Invertieren und Spiegeln haben.

### Lösung:

Sei  $\alpha_{0,n}$  die Amplitude des gesuchten Zustands bei der  $n$ -ten Iteration und  $\alpha_{1,n}$  die Amplitude der andern Zustände bei der  $n$ -ten Iteration.

Dann ergibt sich durch Invertieren  $-\alpha_{0,n}$  als Amplitude des gesuchten Zustands, und der Mittelwert ist

$$m_n = \frac{1}{N} \left( -\alpha_{0,n} + (N-1) \cdot \alpha_{1,n} \right).$$

Spiegeln am Mittelwert liefert entsprechend der Formel  $s(a) = 2m - a$  dann die Rekursionsformeln

$$\alpha_{0,n+1} = 2 \cdot m_n - (-\alpha_{0,n}) = \alpha_{0,n+1} = 2 \cdot m_n + \alpha_{0,n} \quad \text{und}$$

$$\alpha_{1,n+1} = 2 \cdot m_n - \alpha_{1,n}.$$

Für  $N = 16$  und  $\alpha_{0,0} = \alpha_{1,0} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$  erhält man

$\alpha_{0,0} = 0.25,$	$\alpha_{1,0} = 0.25$
$\alpha_{0,1} = 0.6875,$	$\alpha_{1,1} = 0.1875$
$\alpha_{0,2} = 0.953125,$	$\alpha_{1,2} = 0.078125$
$\alpha_{0,3} = 0.98046875,$	$\alpha_{1,3} = -0.05078125$
$\alpha_{0,4} = 0.762695313,$	$\alpha_{1,4} = -0.166992188$
$\alpha_{0,5} = 0.354248047,$	$\alpha_{1,5} = -0.241455078$
$\alpha_{0,6} = -0.14276123,$	$\alpha_{1,6} = -0.255554199$

## Aufgabe 2

Betrachtet wird die Matrix  $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$  einer Spiegelung am Mittelwert, die gegeben ist durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{N} - 1 & \frac{2}{N} & \cdots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} - 1 & \cdots & \frac{2}{N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{N} & \cdots & & \frac{2}{N} - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lautet die Matrix konkret für  $N = 4$  und  $N = 8$ ?

b) Testen Sie exemplarisch

b1) zu  $N = 4$  und  $\vec{w}_1 = (0, 0, 4, 0)^T$  bzw.  $\vec{w}_2 = (0, 1, 2, 5)^T$ ,

b2) zu  $N = 8$  und  $\vec{w}_0 = (1, 3, 1, 2, 4, 7, 6, 0)^T$ ,

dass  $S \cdot \vec{w}_i$  eine Spiegelung am Mittelwert bewirkt.

c) Berechnen Sie zu  $N = 4$  konkret, dass  $S = H^{\otimes 2} \cdot (-D) \cdot H^{\otimes 2}$  mit  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  gilt.

d) Sei  $N = 8$ . Berechnen Sie  $S \cdot \vec{v}$  zu  $\vec{v} = (0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ,

1) indem Sie die Darstellung aus a) nutzen,

2) indem Sie die Darstellung

$$S = H^{\otimes 3} \cdot (-D) \cdot H^{\otimes 3} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nutzen und  $S \cdot \vec{v}$  durch dreimalige Matrix-Vektor-Multiplikation ermitteln.

e) Überzeugen Sie sich konkret für  $N = 4$  und  $N = 8$ , dass die Spalten von  $S$  die Länge 1 haben und paarweise orthogonal zueinander sind, die Matrix  $S$  also unitär ist.

f) Rechnen Sie für allgemeines  $N$  nach, dass die Spalten von  $S$  die Länge 1 haben und paarweise orthogonal zueinander sind, die Matrix  $S$  also unitär ist.

## Lösung:

a) Für  $N = 4$  ist

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für  $N = 8$  ist

$$S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

b1) Mit der Darstellung aus a) ist

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

was der Spiegelung der Werte von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  am Mittelwert 1 entspricht.

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

was der Spiegelung der Werte von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  am Mittelwert 2 entspricht, und

b2) Mit der Darstellung aus a) ist

$$S \cdot \vec{w}_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Der Mittelwert der Werte in  $\vec{w}_0$  ist

$$\frac{1}{8} \cdot (1 + 3 + 1 + 2 + 4 + 7 + 6 + 0) = 3,$$

und durch Spiegeln am Mittelwert 3 erhält man aus  $\vec{w}_0$  die Werte  $S \cdot \vec{w}_0$ .

c) Es ist

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

d) 1)

$$S \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2) Es ist

$$H^{\otimes 3} = \frac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation  $H^{\otimes 3} \cdot \vec{v}$  liefert die zweite Spalte von  $H^{\otimes 3}$  multipliziert mit 8, also

$$\begin{aligned}
 H^{\otimes 3} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2^{3/2}} (8, -8, 8, -8, 8, -8, 8, -8)^T \\
 &= \frac{8}{\sqrt{8}} (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^T.
 \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit  $-D$  invertiert alle Elemente bis auf das erste, also

$$(-D) \cdot H^{\otimes 3} \cdot \vec{v} = \frac{8}{\sqrt{8}}(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)^T.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & H^{\otimes 3} \cdot (-D) \cdot H^{\otimes 3} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{8}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Für  $N = 4$  ist die Länge einer Spalte gleich

$$\sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

und das Skalarprodukt zweier Spalten ergibt

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Für  $N = 8$  ist die Länge einer Spalte gleich

$$\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+7}{16}} = 1,$$

und das Skalarprodukt zweier Spalten ergibt

$$2 \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{16} + \frac{6}{16} = 0.$$

f) Für allgemeines  $N$  ist die Länge einer Spalte gleich

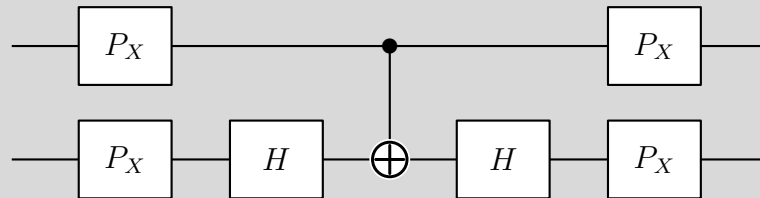
$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{2}{N} - 1\right)^2 + (N-1) \cdot \left(\frac{2}{N}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{N^2} - 2 \cdot \frac{2}{N} + 1 + \frac{4}{N} - \frac{4}{N^2}} = 1, \end{aligned}$$

und das Skalarprodukt zweier Spalten ergibt

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\left(\frac{2}{N} - 1\right) \cdot \frac{2}{N}\right) + (N-2) \cdot \left(\frac{2}{N} \cdot \frac{2}{N}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{4}{N^2} - 2 \cdot \frac{2}{N} + \frac{4}{N} - 2 \cdot \frac{4}{N^2} = 0. \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

- a) Begründen Sie, dass der abgebildete Schaltkreis eine Multiplikation des Zustandsvektors mit  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  bewirkt.



- b) Entwerfen Sie einen Schaltkreis auf einem 3-Qubit-Register, der eine Multiplikation des Zustandsvektors mit  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  bewirkt.

Tipp: Nutzen Sie das Toffoli-Gatter!

### Lösung:

- a) Falls das CNOT-Gatter nicht schaltet, heben sich beim zweiten Qubit die beiden Hadamard-Gatter und damit auch die beiden  $P_X$ -Gatter auf, d.h., das zweite Qubit wird nicht geändert. Dies passiert, wenn das erste Qubit gleich  $|1\rangle$  ist. Also bleiben  $|10\rangle$  und  $|11\rangle$  unverändert.

Falls das zweite Qubit am Eingang gleich  $|1\rangle$  ist, so wird es durch das  $P_X$ -Gatter zu  $|0\rangle$  und dann durch das Hadamard-Gatter zu  $|+\rangle$ . Beim CNOT-Gatter bleibt  $|+\rangle$  als Ziel-Qubit unverändert (s. Aufgabe 9 von Blatt 3); durch das zweite Hadamard-Gatter und anschließende  $P_X$ -Gatter wird das zweite Qubit also wieder zu  $|0\rangle$ . Also bleiben  $|01\rangle$  und  $|11\rangle$  unverändert (letzteres war auch schon durch die erste Überlegung klar).

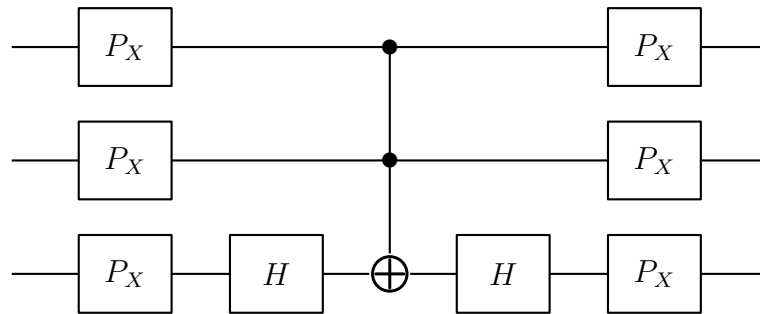
Beim Eingangszustand  $|00\rangle$  hat man vor dem CNOT-Gatter den Zustand  $|1\rangle \otimes |-\rangle$ , der durch das CNOT-Gatter zu  $-|1\rangle \otimes |-\rangle$  wird (s. Aufgabe 9 von Blatt 3). Die hinteren Gatter transformieren dies zu  $-|00\rangle$ .

Insgesamt hat man folgende Abbildungen der Basiszustände:

$$|00\rangle \mapsto -|00\rangle, \quad |01\rangle \mapsto |01\rangle, \quad |10\rangle \mapsto |10\rangle \quad \text{und} \quad |11\rangle \mapsto |11\rangle,$$

was genau der Abbildungsmatrix  $D$  entspricht.

- b) Der folgende Schaltkreis erfüllt die Anforderung:



Begründung:

Wie bei a) sieht man, dass der Eingangszustand unverändert am Ausgang erscheint, falls das Toffoli-Gatter nicht schaltet, was der Fall ist, sobald mindestens eines der ersten beiden Qubits gleich  $|1\rangle$  ist, und ebenso, falls das letzte Qubit gleich  $|1\rangle$  ist.

Für den Fall, dass alle Qubits gleich  $|0\rangle$  sind, sieht man ähnlich wie in a), dass man dann am Ausgang  $|000\rangle$  erhält.

#### Aufgabe 4

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für  $n = 4$ , also  $N = 16$ , zur Suche eines Elements  $x_0 \in \{0, 15\}$ .

- Berechnen und visualisieren Sie in einem  $|x_0\rangle_4^\perp$ - $|x_0\rangle_4$ -Koordinatensystem den Zustand  $|\Psi_0\rangle$  nach der Initialisierung sowie die Zustände  $|\Psi_k\rangle$  nach  $k$  Grover-Iterationen,  $k = 1, \dots, 6$ .
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nach  $k$  Iterationen ( $k = 1, \dots, 6$ ), bei einer Messung den gesuchten Zustand zu erhalten?
- Stellen Sie einen Zusammenhang Ihrer Ergebnisse mit denen von Aufgabe 1 her.

**Lösung:**

- Im  $|x_0\rangle_4^\perp$ - $|x_0\rangle_4$ -Koordinatensystem entsprechen  $k$  Grover-Iterationen einer Drehung um den Winkel  $\beta_k = (k + \frac{1}{2})\beta$  mit

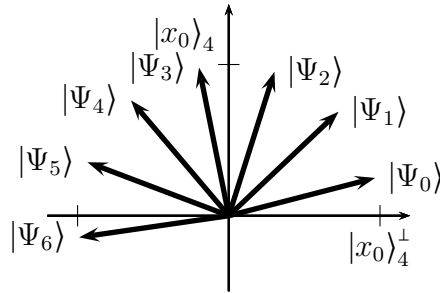
$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{2}{N}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{16}\right) \approx 28,955^\circ.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} |\Psi_k\rangle &= \cos(\beta_k) \cdot |x_0\rangle_4^\perp + \sin(\beta_k) \cdot |x_0\rangle_4 \\ &= \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta\right) \cdot |x_0\rangle_4^\perp + \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta\right) \cdot |x_0\rangle_4, \end{aligned}$$

konkret

$$\begin{aligned}
|\Psi_0\rangle &\approx 0,968 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,252 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_1\rangle &\approx 0,726 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,688 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_2\rangle &\approx 0,302 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,953 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_3\rangle &\approx -0,197 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,980 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_4\rangle &\approx -0,647 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,763 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_5\rangle &\approx -0,935 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,354 \cdot |x_0\rangle_4, \\
|\Psi_6\rangle &\approx -0,990 \cdot |x_0\rangle_4^\perp - 0,143 \cdot |x_0\rangle_4.
\end{aligned}$$



*Alternative Berechnungsmöglichkeit:*

Nach der Initialisierung hat man

$$\begin{aligned}
|\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} |x_0\rangle_4 + \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{N-1} \cdot |x_0\rangle_4^\perp \\
&= \frac{1}{4} |x_0\rangle_4 + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot |x_0\rangle_4^\perp \approx 0,252 |x_0\rangle_4 + 0,968 \cdot |x_0\rangle_4^\perp.
\end{aligned}$$

Die Vorfaktoren zu  $|x_0\rangle_4^\perp$  und  $|x_0\rangle_4$  (beachte die Reihenfolge!) für  $|\Psi_k\rangle$  ergeben sich nun sukzessive durch Multiplikation mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,875 & -0,484 \\ 0,484 & 0,875 \end{pmatrix}:$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0,968 \\ 0,25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,726 \\ 0,688 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_1\rangle \approx 0,726 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,688 \cdot |x_0\rangle_4,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0,726 \\ 0,688 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,302 \\ 0,953 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_2\rangle \approx 0,302 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,953 \cdot |x_0\rangle_4,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0,302 \\ 0,953 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,197 \\ 0,980 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_3\rangle \approx -0,197 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,980 \cdot |x_0\rangle_4,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -0,197 \\ 0,980 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,647 \\ 0,763 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_4\rangle \approx -0,647 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,763 \cdot |x_0\rangle_4,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -0,647 \\ 0,763 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,935 \\ 0,354 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_5\rangle \approx -0,935 \cdot |x_0\rangle_4^\perp + 0,354 \cdot |x_0\rangle_4,$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} -0,935 \\ 0,354 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,990 \\ -0,143 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad |\Psi_6\rangle \approx -0,990 \cdot |x_0\rangle_4^\perp - 0,143 \cdot |x_0\rangle_4.$$

b) Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich durch die Quadrate der Vorfaktoren von  $|x_0\rangle_4$ :

$$k = 0 : 0,063, \quad k = 1 : 0,473, \quad k = 2 : 0,908, \quad k = 3 : 0,961,$$

$$k = 4 : 0,582, \quad k = 5 : 0,125, \quad k = 6 : 0,020.$$

c) Die Vorfaktoren von  $|x_0\rangle_4$  sind genau die Werte  $\alpha_{0,k}$ .

Bei  $|x_0\rangle_4^\perp$  werden alle Zustände außer  $|x_0\rangle_4$ , also 15 einzelne Zustände mit jeweils gleicher Amplitude  $\alpha_{1,k}$ , zusammengefasst. Das Quadrat des Vorfaktors ergibt die Wahrscheinlichkeit, einen Zustand ungleich  $|x_0\rangle_4$  zu messen; dies kann man auch durch  $15 \cdot \alpha_{1,k}^2$  berechnen. Also gilt

$$\text{Vorfaktoren von } |x_0\rangle_4^\perp = \sqrt{15} \cdot \alpha_{1,k}.$$

## Aufgabe 5

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für  $n = 10$ , also  $N = 1024$ , zur Suche eines Elements  $x_0 \in \{0, 1023\}$ .

- Wie groß ist die gerundete prognostizierte optimale Iterationsanzahl  $k_{\text{opt}}$ ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man mit dieser Iterationsanzahl tatsächlich das gesuchte Element?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das gesuchte Element zu messen, wenn man eine Iteration mehr bzw. weniger macht also bei b)?
- Welche Amplituden hat der Zustand  $|x_0\rangle$  bzw. haben die Zustände  $|l\rangle$ ,  $l \in \{0, \dots, 1023\}$ ,  $l \neq x_0$ , nach 8 Iterationen?

## Lösung:

a) Es ist

$$k_{\text{opt}} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{N} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{1024} - \frac{1}{2} \approx 24,63,$$

gerundet also 25.

- b) Im  $|x_0\rangle_{10}^\perp$ - $|x_0\rangle_{10}$ -Koordinatensystem entsprechen  $k$  Grover-Iterationen einer Drehung um den Winkel  $\beta_k = (k + \frac{1}{2})\beta$  mit

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{2}{N}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{1024}\right) \approx 3,582^\circ.$$

Damit erhält man nach 25 Iterationen einen Winkel von

$$\beta_{25} = 25,5 \cdot \beta \approx 91,33^\circ$$

und damit den Zustand

$$\begin{aligned} |\Psi_{25}\rangle &= \cos(\beta_{25}) \cdot |x_0\rangle_{10}^\perp + \sin(\beta_{25}) \cdot |x_0\rangle_{10} \\ &\approx -0,023 \cdot |x_0\rangle_{10}^\perp + 0,9997 \cdot |x_0\rangle_{10}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit,  $x_0$  zu messen, ist also gleich

$$\sin^2(\beta_{25}) \approx 0,9995.$$

- c) Bei 24 bzw. 26 Iterationen ergibt sich jeweils als Wahrscheinlichkeit

$$\sin^2(\beta_{24}) = \sin^2(24,5 \cdot \beta) \approx \sin^2(87,75^\circ) \approx 0,9985$$

bzw.

$$\sin^2(\beta_{26}) = \sin^2(26,5 \cdot \beta) \approx \sin^2(94,91^\circ) \approx 0,9927.$$

- d) Entsprechend der Erläuterungen bei b) erhält man nach 8 Iterationen einen Winkel von

$$\beta_8 = 8,5 \cdot \beta \approx 30,44^\circ$$

und damit den Zustand

$$\begin{aligned} |\Psi_8\rangle &= \cos(\beta_8) \cdot |x_0\rangle_{10}^\perp + \sin(\beta_8) \cdot |x_0\rangle_{10} \\ &\approx 0,862 \cdot |x_0\rangle_{10}^\perp + 0,507 \cdot |x_0\rangle_{10}. \end{aligned}$$

Damit ist 0,507 als Amplitude von  $|x_0\rangle_{10}$  offensichtlich.

Der Zustand  $|x_0\rangle_{10}^\perp$  ist die gleichmäßige Überlagerung aller anderen Zustände:

$$|x_0\rangle_{10}^\perp = \frac{1}{\sqrt{1023}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq x_0}}^{1023} |l\rangle.$$

Damit haben die einzelnen Zustände  $|l\rangle$ ,  $l \in \{0, \dots, 1023\}$  als Amplitude

$$\cos(\beta_8) \cdot \frac{1}{\sqrt{1023}} \approx 0,027.$$

### Aufgabe 6

Sei  $\beta_0$  der Winkel des Zustands im  $|x_0\rangle_n^\perp$ - $|x_0\rangle_n$ -Koordinatensystem nach der Initialisierung und  $\beta$  der Drehwinkel bei einer Iteration beim Grover-Algorithmus.

Zeigen Sie, dass  $\beta_0 = \frac{1}{2}\beta$  gilt. (Tipp: Additionstheorem!)

#### Lösung:

Es ist

$$\beta_0 = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{N}} \quad \text{und} \quad \beta = \arccos \left(1 - \frac{2}{N}\right).$$

Zu zeigen ist

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\beta \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta_0 = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\beta_0) = \cos(\beta) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Tatsächlich gilt mit dem Additionstheorem  $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$$\begin{aligned} \cos(2\beta_0) &= 2\cos^2(\beta_0) - 1 = 2 \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{N}}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) - 1 = 1 - \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

### Aufgabe 7

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für  $n = 3$ , also  $N = 8$ , wobei

- das zweite und dritte Element (bei Zählung 1 bis 8)
- das zweite, dritte und fünfte Element (bei Zählung 1 bis 8)

gesuchte Treffer darstellen.

Berechnen Sie jeweils den Zustand  $|\Psi_1\rangle$  nach einer Grover-Iteration. Nutzen Sie dazu die Betrachtung entsprechender (Dreh-)Winkel in einem zweidimensionalen Koordinatensystem.

Wie lautet jeweils eine vektorielle Darstellung von  $|\Psi_1\rangle$ ?

#### Lösung:

Eine Grover-Iteration entspricht im zweidimensionalen Koordinatensystem, das von der gleichmäßigen Überlagerung der nicht-gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle^\perp$  und der gleichmäßigen

Überlagerung der gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle$  aufgespannt wird, einer Drehung um den Winkel  $\beta$  mit

$$\cos \beta = 1 - \frac{2r}{N},$$

wobei  $r$  die Anzahl der Treffer angibt, also bei a)  $r = 2$  und bei b)  $r = 3$ .

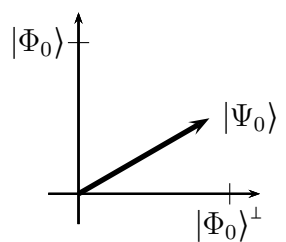
Die Initialisierung liefert einen Zustand, der im  $|\Phi_0\rangle^\perp$ - $|\Phi_0\rangle$ -Koordinatensystem einen Winkel  $\beta_0 = \frac{1}{2}\beta$  gegenüber der  $|\Phi_0\rangle^\perp$ -Achse bildet.

Nach einer Grover-Iteration hat man also einen Winkel  $\beta + \beta_0 = 1.5 \cdot \beta$  gegenüber der  $|\Phi_0\rangle^\perp$ -Achse.

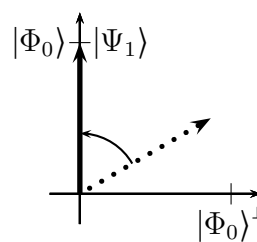
a) Bei  $r = 2$  ist

$$\cos \beta = 1 - \frac{2r}{N} = 1 - \frac{2 \cdot 2}{8} = \frac{1}{2},$$

also  $\beta = 60^\circ$  und damit  $1.5 \cdot \beta = 90^\circ$ .



nach Initialisierung



nach einer Grover-Iteration

Also liegt  $|\Psi_1\rangle$  genau in Richtung der gesuchten Zustände, entspricht also der gleichmäßigen Überlagerung der beiden Treffer.

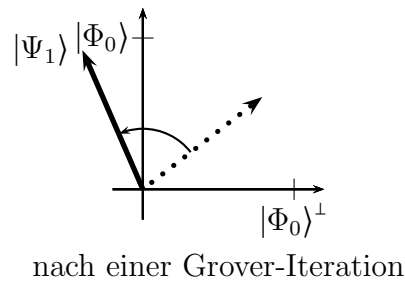
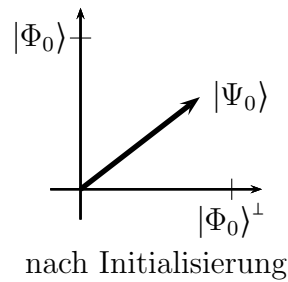
Damit ist

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bei  $r = 3$  ist

$$\cos \beta = 1 - \frac{2r}{N} = 1 - \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{1}{4},$$

also  $\beta = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.5^\circ$  und damit  $1.5 \cdot \beta \approx 113.3^\circ$ .



Also ist

$$|\Psi_1\rangle = \cos(1.5 \cdot \beta) \cdot |\Phi_0\rangle^\perp + \sin(1.5 \cdot \beta) \cdot |\Phi_0\rangle \approx -0.40 \cdot |\Phi_0\rangle^\perp + 0.92 \cdot |\Phi_0\rangle.$$

Dabei ist  $|\Phi_0\rangle$  ist eine gleichmäßige Überlagerung der 3 gesuchten Zustände und  $|\Phi_0\rangle^\perp$  entsprechend eine gleichmäßige Überlagerung der 5 nicht gesuchten Zustände, also

$$|\Psi_1\rangle = \cos(1.5 \cdot \beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(1.5 \cdot \beta) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.18 \\ 0.53 \\ 0.53 \\ -0.18 \\ 0.53 \\ -0.18 \\ -0.18 \\ -0.18 \\ -0.18 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 8

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für  $N = 128$ , wobei es  $r = 5$  Treffer gibt.

- Was ist die gerundete prognostizierte optimale Iterationsanzahl  $k_{\text{opt}}$ ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dieser Iterationsanzahl tatsächlich einen Treffer?

Wie ist es mit einer Iteration mehr oder weniger?

### Lösung:

- Es ist

$$k_{\text{opt}} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{N}{r}} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{128}{5}} - \frac{1}{2} \approx 3.47,$$

also gerundet  $k_{\text{opt}} = 3$ .

- b) Im zweidimensionalen Koordinatensystem, das von der gleichmäßigen Überlagerung der nicht-gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle^\perp$  und der gleichmäßigen Überlagerung der gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle$  aufgespannt wird, entsprechen  $k$  Grover-Iterationen einer Drehung um den Winkel  $\beta_k = (k + \frac{1}{2})\beta$  mit

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{2r}{N}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{128}\right) \approx 22,798^\circ.$$

Nach 3 Iteration ist man also bei

$$\beta_3 = 3.5 \cdot \beta \approx 3.5 \cdot 22,798^\circ \approx 79,80^\circ.$$

Der Sinus dieses Winkels gibt die Amplitude von  $|\Phi_0\rangle$  an, dessen Quadrat also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\sin^2(\beta_3) \approx \sin^2(79,80^\circ) \approx 0,969.$$

Nach 2 Iterationen erhält man

$$\beta_2 = 2.5 \cdot \beta \approx 2.5 \cdot 22,798^\circ \approx 57,00^\circ$$

und als Wahrscheinlichkeit

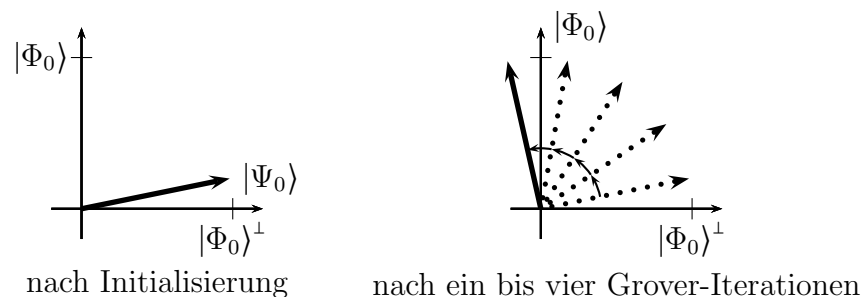
$$\sin^2(\beta_2) \approx \sin^2(57,00^\circ) \approx 0,703.$$

Nach 4 Iterationen erhält man

$$\beta_4 = 4.5 \cdot \beta \approx 4.5 \cdot 22,798^\circ \approx 102,59^\circ$$

und als Wahrscheinlichkeit

$$\sin^2(\beta_4) \approx \sin^2(102,59^\circ) \approx 0,952.$$



## Aufgabe 9

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für allgemeines  $N$ , wobei es  $r$  Treffer gibt.

- a) Mit welcher Formel kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man bei einer Iterationsanzahl  $k$  tatsächlich einen Treffer erhält?
- b) Berechnen Sie numerisch (mit einem Taschenrechner, einer Tabellenkalkulation oder einem kleinen Programm) für verschiedene Werte von  $N$  und  $r$  (z.B.  $N = 1024$  und  $r = 4$  oder  $r = 7$ ), wie wahrscheinlich man bei einer Messung einen Treffer erhält, wenn man eine Iterationszahl gleichverteilt zwischen 1 und  $\sqrt{N}$  zieht.
- Experimentieren Sie mit Ihrer Funktion!

### Lösung:

- a) Wie in Aufgabe 8 schon erwähnt, gilt:

Im zweidimensionalen Koordinatensystem, das von der gleichmäßigen Überlagerung der nicht-gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle^\perp$  und der gleichmäßigen Überlagerung der gesuchten Zustände  $|\Phi_0\rangle$  aufgespannt wird, entsprechen  $k$  Grover-Iterationen einer Drehung um den Winkel  $\beta_k = (k + \frac{1}{2})\beta$  mit

$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{2r}{N}\right).$$

Der Sinus von  $\beta_k$  gibt die Amplitude von  $|\Phi_0\rangle$  an, dessen Quadrat also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p_k = \sin^2\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\beta\right) = \sin^2\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \arccos\left(1 - \frac{2r}{N}\right)\right).$$

- b) Ist  $I$  der abgerundete Wert von  $\sqrt{N}$ , so zieht man jede Iterationszahl  $k \in \{1, \dots, I\}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{I}$ . Mit der in a) hergeleiteten Formel für die Wahrscheinlichkeit  $p_k$  für eine Treffer-Messung bei  $k$  Iterationen ist die Gesamtwahrscheinlichkeit also

$$p = \frac{1}{I} \sum_{k=1}^I p_k.$$

Numerisch ergibt sich beispielsweise bei  $N = 1024$

$$\text{zu } r = 4: p \approx 0,452 \quad \text{und} \quad \text{zu } r = 7: p \approx 0,561.$$