FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2025
23.04.2025

# 5. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

**Aufgabe 1**

Bestimmen Sie für jede mögliche Funktion

$$f : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

die Transformationsmatrix zu der Transformation $U_f$ entsprechend des Deutsch-Algorithmus auf einem 2-Qubit-Register, die durch

$$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) \;=\; |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle \quad \text{für } x, y \in \{0,1\}$$

festgelegt ist.

**Lösung:**

Es gibt 4 verschiedene Funktionen $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$:

- $f(0) = f(1) = 0$. Dann ist für $x, y \in \{0,1\}$

  $$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) \;=\; |x\rangle \otimes |y \oplus 0\rangle \;=\; |x\rangle \otimes |y\rangle\,,$$

  also $U_f$ die Identität:

  $$U_f \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Dann gilt

  $$|00\rangle \mapsto |00\rangle\,, \quad |01\rangle \mapsto |01\rangle\,, \quad |10\rangle \mapsto |11\rangle\,, \quad |11\rangle \mapsto |10\rangle\,,$$

  also

  $$U_f \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $f(0) = 1,\ f(1) = 0$. Dann gilt

  $$|00\rangle \mapsto |01\rangle\,, \quad |01\rangle \mapsto |00\rangle\,, \quad |10\rangle \mapsto |10\rangle\,, \quad |11\rangle \mapsto |11\rangle\,,$$

  also

  $$U_f \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $f(0) = f(1) = 1$. Dann gilt

  $$|00\rangle \mapsto |01\rangle\,, \quad |01\rangle \mapsto |00\rangle\,, \quad |10\rangle \mapsto |11\rangle\,, \quad |11\rangle \mapsto |10\rangle\,,$$

  also

  $$U_f \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2**

Betrachtet wird die Transformation $U_f$ entsprechend des Deutsch-Algorithmus auf einem 2-Qubit-Register wie oben zu einer beliebigen Funktion $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$.

Berechnen Sie die Wirkung von $U_f$ auf $|\Psi\rangle \otimes |+\rangle$ mit einem beliebigen Zustand $|\Psi\rangle$.

Tipp: Berechnen Sie zunächst die Wirkung von $U_f$ auf $|x\rangle \otimes |+\rangle$ mit $x \in \{0,1\}$.

**Lösung:**

Es ist

$$\begin{aligned} U_f(|x\rangle \otimes |+\rangle) &= U_f\Big( |x\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big( |0\rangle + |1\rangle\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(U_f(|x\rangle \otimes |0\rangle) + U_f(|x\rangle \otimes |1\rangle)\big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big( |x\rangle \otimes |0 \oplus f(x)\rangle + |x\rangle \otimes |1 \oplus f(x)\rangle \big) \\ &= |x\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big( |0 \oplus f(x)\rangle + |1 \oplus f(x)\rangle \big). \end{aligned}$$

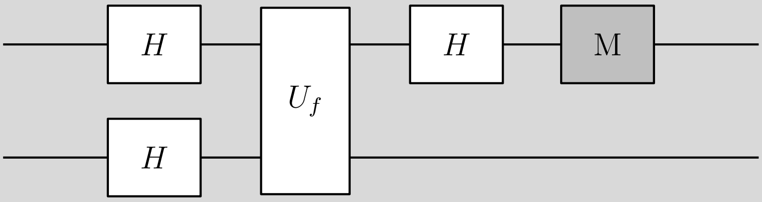
Egal ob $f(x) = 1$ oder $f(x) = 0$ ist, ist in jedem Fall $|0 \oplus f(x)\rangle + |1 \oplus f(x)\rangle$ gleich $|0\rangle + |1\rangle$, und daher

$$U_f(|x\rangle \otimes |+\rangle) \;=\; |x\rangle \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big( |0\rangle + |1\rangle \big) \;=\; |x\rangle \otimes |+\rangle\,.$$

Die Wirkung von $U_f$ auf $|x\rangle \otimes |+\rangle$ ist gleich der Identität. Also ist $U_f$ auch die Identität für jeden Zustand.

**Aufgabe 3**

Betrachtet wird der Schaltkreis des Deutsch-Algorithmus:




Beim Deutsch-Algorithmus wendet man den Schaltkreis auf $|0\rangle \otimes |1\rangle$ an und kann dann durch die Messung entscheiden, ob $f(0) = f(1)$ oder $f(0) \neq f(1)$ ist.

Was passiert, wenn man

a) $|1\rangle \otimes |1\rangle$, b) $|0\rangle \otimes |0\rangle$, c) $|1\rangle \otimes |0\rangle$

am Eingang hat? Kann man dann auch durch die Messung entscheiden, ob $f(0) = f(1)$ oder $f(0) \neq f(1)$ ist?

**Lösung:**

Bei b) und c) ist das zweite Qubit nach den ersten Hadamard-Operationen gleich $|+\rangle$. Entsprechend Aufgabe 2 wirkt dann $U_f$ auf das erste Qubit wie die Identität. Das zweite Hadamard-Gatter auf dem ersten Qubit macht dann die Wirkung des ersten Hadamard-Gatters rückgängig und man misst den Eingangszustand des ersten Qubits, unabhängig von der Funktion $f$.

Zu a): Durch die ersten Hadamard-Operationen wird $|1\rangle \otimes |1\rangle$ zu $|-\rangle \otimes |-\rangle$. Für $x \in \{0,1\}$ gilt bekanntlich

$$U_f\big(\,|x\rangle \otimes |-\rangle\,\big) = (-1)^{f(x)} \cdot \big(\,|x\rangle \otimes |-\rangle\,\big).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} U_f\big(\,|-\rangle \otimes |-\rangle\,\big) &= U_f\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes |-\rangle\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(U_f\big(\,|0\rangle \otimes |-\rangle\,\big) - U_f\big(\,|1\rangle \otimes |-\rangle\,\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big((-1)^{f(0)} \cdot \big(\,|0\rangle \otimes |-\rangle\,\big) - (-1)^{f(1)} \cdot \big(\,|1\rangle \otimes |-\rangle\,\big)\Big). \qquad (*) \end{aligned}$$

Ist $f$ konstant, also $f(0) = f(1)$, so ist $(*)$ gleich

$$(-1)^{f(0)} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\,|0\rangle \otimes |-\rangle\,\big) - \big(\,|1\rangle \otimes |-\rangle\,\big)\Big) = (-1)^{f(0)} \cdot |-\rangle \otimes |-\rangle\,.$$

Ist $f(0) \neq f(1)$, also $(-1)^{f(0)} = -(-1)^{f(1)}$ so ist $(*)$ gleich

$$(-1)^{f(0)} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\,|0\rangle \otimes |-\rangle\,\big) + \big(\,|1\rangle \otimes |-\rangle\,\big)\Big) = (-1)^{f(0)} \cdot |+\rangle \otimes |-\rangle\,.$$

Damit hat man genau die umgedrehte Situation wie bei der Initialisierung mit $|0\rangle \otimes |1\rangle$: Durch die zweite Hadamard-Transformation auf das erste Qubit wird dieses abgesehen vom Vorfaktor nun

- falls $f$ konstant ist zu $H|-\rangle = |1\rangle$,
- falls $f(0) \neq f(1)$ zu $H|+\rangle = |0\rangle$,

so dass man durch die abschließende Messung entscheiden kann, welcher Fall vorliegt.

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie

a) für die konstante Funktion

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\},\ f(x) = 1 \text{ für alle } x \in \{0,1\}^2,$$

b) für die balancierte Funktion

$$f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\},\ f(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2 \text{ für alle } (x_1,x_2) \in \{0,1\}^2,$$

die Transformationsmatrix zu der Transformation $U_f$ entsprechend des Deutsch-Jozsa-Algorithmus auf einem 3-Qubit-Register, die durch

$$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) \;=\; |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle \quad \text{für } x \in \{0,1\}^2 \text{ und } y \in \{0,1\}$$

festgelegt ist.

**Lösung:**

a) Bei Basiszuständen wird jeweils das letzte Qubit geflippt, also

$$|000\rangle \mapsto |001\rangle\,, \quad |001\rangle \mapsto |000\rangle\,, \quad |010\rangle \mapsto |011\rangle\,, \quad |011\rangle \mapsto |010\rangle\,,$$
$$|100\rangle \mapsto |101\rangle\,, \quad |101\rangle \mapsto |100\rangle\,, \quad |110\rangle \mapsto |111\rangle\,, \quad |111\rangle \mapsto |110\rangle\,.$$

Die Transformationsmatrix ist also

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$|000\rangle \mapsto |000\rangle\,, \quad |001\rangle \mapsto |001\rangle\,, \quad |010\rangle \mapsto |011\rangle\,, \quad |011\rangle \mapsto |010\rangle\,,$$

$$|100\rangle \mapsto |101\rangle\,, \quad |101\rangle \mapsto |100\rangle\,, \quad |110\rangle \mapsto |110\rangle\,, \quad |111\rangle \mapsto |111\rangle\,.$$

Die Transformationsmatrix ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5**

Betrachtet wird der Deutsch-Jozsa-Algorithmus mit der Funktion $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ mit

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 1 \\ &f(4) = 0, \quad f(5) = 1, \quad f(6) = 1, \quad f(7) = 1. \end{aligned}$$

a) Wie lautet der Zustand $\widetilde{\Psi_2}$?

b) Welche Messergebnisse kommen mit welchen Wahrscheinlichkeiten vor?

Tipp: Sie können $\widetilde{\Psi_3}$ durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation der Transformationsmatrix zu $H^{\otimes 3}$ mit $\widetilde{\Psi_2}$ berechnen.

**Lösung:**

a) Bekanntlich ist

$$\widetilde{|\Psi_2\rangle} = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \cdot |x\rangle_n\,,$$

hier also konkret

$$\begin{aligned} \widetilde{|\Psi_2\rangle} &= \frac{1}{2^{3/2}} \Big( (-1)^{f(0)}\,|0\rangle_3 + (-1)^{f(1)}\,|1\rangle_3 + (-1)^{f(2)}\,|2\rangle_3 + (-1)^{f(3)}\,|3\rangle_3 \\ &\qquad + (-1)^{f(4)}\,|4\rangle_3 + (-1)^{f(5)}\,|5\rangle_3 + (-1)^{f(6)}\,|6\rangle_3 + (-1)^{f(7)}\,|7\rangle_3 \Big) \\ &= \frac{1}{2^{3/2}} \Big( |0\rangle_3 + |1\rangle_3 + |2\rangle_3 - |3\rangle_3 + |4\rangle_3 - |5\rangle_3 - |6\rangle_3 - |7\rangle_3 \Big) \end{aligned}$$

b) Es ist

$$
\begin{aligned}
\widetilde{|\Psi_3\rangle} &= H^{\otimes 3} \cdot \widetilde{|\Psi_2\rangle} \\
&= \frac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{2} \big( |1\rangle_3 + |2\rangle_3 + |4\rangle_3 - |7\rangle_3 \big).
\end{aligned}
$$

Also kommen die Messergebnisse $|1\rangle_3$, $|2\rangle_3$, $|4\rangle_3$ und $|7\rangle_3$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ vor.

**Aufgabe 6**

Betrachtet wird der Algorithmus von Bernstein-Vazirani mit der Funktion $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, die durch $a = 5 = 101_2$ festgelegt wird.

a) Wie lauten die Funktionswerte $f(x)$, $x = 0, \dots, 7$?

b) Wie lautet der Zustand $\widetilde{\Psi_2}$?

c) Berechnen Sie $\widetilde{\Psi_3}$.

Tipp: Nutzen Sie wieder eine Matrix-Vektor-Multiplikation der Transformationsmatrix zu $H^{\otimes 3}$ mit $\widetilde{\Psi_2}$.

**Lösung:**

a) Es ist

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = 0, \quad & f(1) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = 1, \\
f(2) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0, \quad & f(3) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = 1, \\
f(4) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = 1, \quad & f(5) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = 0, \\
f(6) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = 1, \quad & f(7) &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \odot \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{|\Psi_2\rangle} &= \tfrac{1}{2^{3/2}} \sum_{x=0}^{2^3-1} (-1)^{f(x)} \cdot |x\rangle_3 \\
&= \tfrac{1}{2^{3/2}} \big( |0\rangle_3 - |1\rangle_3 + |2\rangle_3 - |3\rangle_3 - |4\rangle_3 + |5\rangle_3 - |6\rangle_3 + |7\rangle_3 \big).
\end{aligned}
$$

c) Es ist

$$
\begin{aligned}
\widetilde{|\Psi_3\rangle} &= H^{\otimes 3} \cdot \widetilde{|\Psi_2\rangle} \\
&= \tfrac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = |5\rangle_3 .
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 7**

a) Zeigen Sie, dass sich jede balancierte Funktion $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, die $f((0,0)) = 0$ erfüllt, darstellen lässt als

$$f(x_1, x_2) = a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \quad , (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2$$

mit geeigentem $(a_1, a_2) \in \{0,1\}^2$.

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen den behaupteten Ausgaben bei den Algorithmen von Deutsch-Jozsa und Bernstein-Vazirani.

b) Geben Sie eine balancierte Funktion $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ an, die $f((0,0,0)) = 0$ erfüllt und sich nicht darstellen lässt als

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3 \quad , (x_1, x_2, x_3) \in \{0,1\}^3$$

mit $(a_1, a_2, a_3) \in \{0,1\}^3$.

c) Überlegen Sie, dass jede Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, die mit einem $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$, $a \neq 0$, definiert ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n,$$

balanciert ist.

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen den behaupteten Ausgaben bei den Algorithmen von Deutsch-Jozsa und Bernstein-Vazirani.

Wie sieht der Zusammenhang aus für den Fall $a = 0$?

**Lösung:**

a) Es gibt drei solche Funktionen, denn bei den verbleibenen drei Argumenten $(0,1)$, $(1,0)$ und $(0,0)$ muss wegen der Balanciertheit genau ein Mal der Funktionswert 0 vorkommen und bei den anderen beiden Argumenten dann der Funktionswert 1:

1. Fall: $f(0,1) = 0$, $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 1$.

   Dann ist $f(x_1, y) = f(x_1, x_2) \; = \; 1 \cdot x_1 \oplus 0 \cdot x_2$, also $(a_1, a_2) = (1, 0)$.

2. Fall: $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 0$, $f(1,1) = 1$.

   Dann ist $f(x_1, y) = f(x_1, x_2) \; = \; 0 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2$, also $(a_1, a_2) = (0, 1)$.

3. Fall: $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 0$.

   Dann ist $f(x_1, y) = f(x_1, x_2) \; = \; 1 \cdot x_1 \oplus 0 \cdot x_2$, also $(a_1, a_2) = (1, 1)$.

Der Algorithmus von Bernstein-Vazirani besagt, dass bei diesen Funktionen am Ende das entsprechende $a$ gemessen wird. Der Algorithmus von Deutsch-Jozsa besagt nur, dass nicht 0 gemessen wird.

b) Die Funktion $f$ (entsprechend Aufgabe 6) ist balanciert:

$$\begin{array}{llll} f(0,0,0) = 0, & f(0,0,1) = 0, & f(0,1,0) = 0, & f(0,1,1) = 1 \\ f(1,0,0) = 0, & f(1,0,1) = 1, & f(1,0,1) = 1, & f(1,1,1) = 1. \end{array}$$

Wäre $f(x_1, x_2, x_3) = a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3$, so müsste $a_1 = f(1,0,0) = 0$, $a_2 = f(0,1,0) = 0$ und $a_3 = f(0,0,1) = 0$ sein, was aber auch $f(1,0,1) = 0$ zur Folge hätte - Widerspruch.

Alternativ kann man argumentieren: Gäbe es derartige $a_1$, $a_2$, $a_3$, so müsste nach Durchlaufen des Bernstein-Vazirani- / Deutsch-Jozsa-Schaltkreises eindeutig $a_1 a_2 a_3$ gemessen werden. Bei Aufgabe 6 wurde aber nachgerechnet, dass es keineindeutiges Messergebnis gibt.

c) Sei $a_{i_0} \neq 0$. Dann sind die beiden Funktionswerte zu $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_{i_0} \neq 0$ und $x_{i_0} \neq 1$ (restliche $x_j$ gleich) verschieden; einer von beiden ist 0, der andere ist 1. Damit erhält man vollständig Paare von 0- und 1-Funktionswerten, so dass die Funktion balanciert ist.

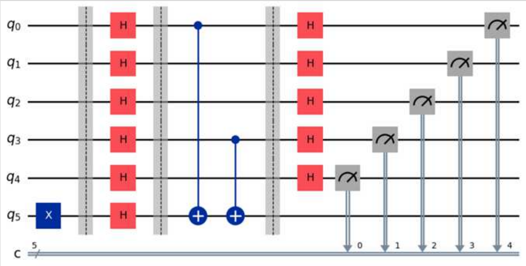
Der Algorithmus von Bernstein-Vazirani besagt, dass bei diesen Funktionen am Ende das entsprechende $a$ gemessen wird. Der Algorithmus von Deutsch-Jozsa besagt nur, dass nicht 0 gemessen wird.

Wenn $a = 0$ ist, so besagt der Algorithmus von Bernstein-Vazirani, dass am Ende dieses $a = 0$ gemessen wird. Der Algorithmus von Deutsch-Jozsa besagt, dass - da die Funktion konstant ist - 0 gemessen wird.

**Aufgabe 8**

Das nebenstehende Bild zeigt einen Schaltkreis, der den Bernstein-Vazirani-Algorithmus für $a = 10010_2$ realisiert. Wie kann man ohne große Rechnung sehen, dass der Schaltkreis als Messergebnis sicher $|a\rangle_5 = |10010\rangle$ liefert?

Tipp: Nutzen Sie Blatt 3, Aufgabe 10.




**Lösung:**

Nach der Anwendung der initialen Hadamard-Gatter sind die Qubits $q_k$ für $k \neq 5$ gleich $|+\rangle$ und $q_5 = |-\rangle$.

Wie bei Blatt 3, Aufgabe 10 berechnet liefert ein CNOT angewendet auf $|+\rangle \otimes |-\rangle$ als Ergebnis $|-\rangle \otimes |-\rangle$. Durch den Bereich mit den CNOT-Gattern werden also die $q_k$, die mit einem CNOT an $q_5$ gekoppelt sind, zu $|-\rangle$, die anderen bleiben bei $|+\rangle$.

Durch die abschließenden Hadamard-Gatter werden $|+\rangle$ zu $|0\rangle$ und $|-\rangle$ zu $|1\rangle$, so dass dann genau die $q_k$, die mit einem CNOT an $q_5$ gekoppelt waren, nun zu $|1\rangle$ werden, die anderen werden $|0\rangle$. Dies entspricht dann genau der durch $a$ gegebenen Binär-Darstellung.