Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Prof. Georg Hoever

SS 2025
16.04.2025

4. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

a) Sei $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$ und $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$ und $|\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$.
Schreiben Sie $|\Psi\rangle$

1) als Linearkombination von $|000\rangle, \ldots, |111\rangle$,
2) mit der $|\cdot\rangle_3$-Schreibweise,
3) als Vektor im $\mathbb{C}^8$.

b) Berechnen Sie die vektorielle Darstellung zu $|0110\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$, indem Sie die Tensorprodukte ausrechnen.

Lösung:

a)

1) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = \frac{1}{2}\big(\,|000\rangle - |001\rangle + |100\rangle - |101\rangle\,\big).$

2) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\big(\,|0\rangle_3 - |1\rangle_3 + |4\rangle_3 - |5\rangle_3\,\big).$

3) $$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}
|0110\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= (0\ 1\ 0\ 0)^T \otimes (0\ 0\ 1\ 0)^T \\
&= (0 \cdot (0\ 0\ 1\ 0)\quad 1 \cdot (0\ 0\ 1\ 0)\quad 0 \cdot (0\ 0\ 1\ 0)\quad 0 \cdot (0\ 0\ 1\ 0))^T \\
&= (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0))^T.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Betrachtet werden bei einem 3-Qubit-Quantenregister die Zustände

$$\begin{aligned}|\Psi_1\rangle &= 0\cdot|0\rangle_3 + 0.3\cdot|1\rangle_3 - 0.5\cdot|2\rangle_3 + 0.3\cdot|3\rangle_3\\ &\qquad - 0.4\cdot|4\rangle_3 - 0\cdot|5\rangle_3 + 0.4\cdot|6\rangle_3 - 0.5\cdot|7\rangle_3\\ |\Psi_2\rangle &= 0.64\cdot|0\rangle_3 + 0.32\cdot|1\rangle_3 - 0.32\cdot|2\rangle_3 - 0.16\cdot|3\rangle_3\\ &\qquad - 0.48\cdot|4\rangle_3 - 0.24\cdot|5\rangle_3 + 0.24\cdot|6\rangle_3 + 0.12\cdot|7\rangle_3\,.\end{aligned}$$

a) Es wird jeweils das zweite Qubit gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man $|1\rangle$, und welchen Zustand erhält man dann?

b) Welcher der beiden Zustände $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$ ist separabel? Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an.

Lösung:

a) Das zweite Qubit ist gleich $|1\rangle$ bei $|010\rangle$, $|011\rangle$, $|110\rangle$ und $|111\rangle$, also bei $|2\rangle_3$, $|3\rangle_3$, $|6\rangle_3$ und $|7\rangle_3$.

- Bei $|\Psi_1\rangle$ ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit

  $$(-0.5)^2 + 0.3^2 + 0.4^2 + (-0.5)^2 \;=\; 0.75.$$

  Der resultierende Zustand ist dann

  $$\frac{1}{\sqrt{0.75}}\big(-0.5\cdot|2\rangle_3 + 0.3\cdot|3\rangle_3 + 0.4\cdot|6\rangle_3 - 0.5\cdot|7\rangle_3\big).$$

- Bei $|\Psi_2\rangle$ ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit

  $$(-0.32)^2 + 0.16^2 + 0.24^2 + 0.12^2 \;=\; 0.2.$$

  Der resultierende Zustand ist dann

  $$\frac{1}{\sqrt{0.2}}\big(-0.32\cdot|2\rangle_3 - 0.16\cdot|3\rangle_3 + 0.24\cdot|6\rangle_3 + 0.12\cdot|7\rangle_3\big).$$

b) Durch „scharfes Hinschauen" sieht man, dass $|\Psi_2\rangle$ separabel ist:

$$|\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.32 \\ -0.32 \\ -0.16 \\ -0.48 \\ -0.24 \\ 0.24 \\ 0.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ -0.12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ -0.12 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.16 \\ -0.12 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 0.16 \\ -0.12 \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 3

Betrachtet wird bei einem 4-Qubit-Quantenregister der Zustand

$$|\Psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \big(|0\rangle_4 + |1\rangle_4 + |8\rangle_4 + |9\rangle_4 + |11\rangle_4 \big).$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man jeweils als Ergebnis $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, und welchen Zustand erhält man, wenn man

a1) das erste Qubit, a2) das zweite Qubit,

misst?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man aus $|\Psi\rangle$ bei Messung der beiden hinteren Qubits als Ergebnis $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ bzw. $|11\rangle$, und in welchen Zustand kollabiert $|\Psi\rangle$ dann jeweils?

Lösung:

Es ist

$$|\Psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{5}} |0000\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |0001\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1000\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1001\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1011\rangle . \qquad (*)$$

a) Durch die Darstellung $(*)$ sieht man:

a1) Bei Messung des ersten Qubits erhält man

- $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$, resultierender Zustand:

$$\sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \big(\tfrac{1}{\sqrt{5}} |0000\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |0001\rangle \big) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \big(|0000\rangle + |0001\rangle \big).$$

- $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$, resultierender Zustand:

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} |1000\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1001\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1011\rangle \right) = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot \left(|1000\rangle + |1001\rangle + |1011\rangle \right).$$

a2) Bei Messung des zweiten Qubits erhält man

- $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1, der resultierende Zustand ist $|\Psi\rangle$.
- $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 0.

b) Durch die Darstellung $(*)$ sieht man:

- $|00\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$, resultierender Zustand:

$$\sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} |0000\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1000\rangle \right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \left(|0000\rangle + |1000\rangle \right).$$

- $|01\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$, resultierender Zustand:

$$\sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} |0001\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1001\rangle \right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \left(|0001\rangle + |1001\rangle \right).$$

- $|10\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit 0.
- $|11\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, resultierender Zustand:

$$\sqrt{5} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}} |1011\rangle = |1011\rangle .$$

Aufgabe 4

Betrachtet wird bei einem 3-Qubit-Quantenregister der Zustand

$$|\Psi\rangle = 0.3\,|000\rangle + 0.4\,|001\rangle + 0.7\,|011\rangle + 0.1\,|110\rangle + 0.5\,|111\rangle .$$

a) Es wird zunächst das erste Qubit gemessen und anschließend das zweite.

a1) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man in der ersten Messung 0 bzw. 1, und in welchem Zustand sind dann jeweils zweites und drittes Qubit?

a2) In welchem Zustand ist das dritte Qubit nach der zweiten Messung für die vier Fälle, die bei der ersten und zweiten Messung möglich sind? Wie wahrscheinlich sind diese Fälle?

b) Es werden (gleichzeitig) die ersten beiden Qubits gemessen.

Wie wahrscheinlich sind die vier verschiedenen Messergebnisse, und in welchem Zustand ist dann jeweils das dritte Qubit?

Lösung:

a) a1) Erste Messung gleich $|0\rangle$ hat die Wahrscheinlichkeit $0.3^2 + 0.4^2 + 0.7^2 = 0.74$.

Zweites und drittes Qubit sind dann im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{0.74}}\big(0.3\,|00\rangle + 0.4\,|01\rangle + 0.7\,|11\rangle\big).$$

Erste Messung gleich $|1\rangle$ hat die Wahrscheinlichkeit $0.1^2 + 0.5^2 = 0.26$.

Zweites und drittes Qubit sind dann im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{0.26}}\big(0.1\,|10\rangle + 0.5\,|11\rangle\big).$$

a2) Nach Messung von $|0\rangle$ beim ersten Qubit erhält man bei Messung des zweiten Qubits

- $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{0.3^2}{0.74} + \frac{0.4^2}{0.74} = \frac{0.25}{0.74}$. Dieser Fall hat also insgesamt die Wahrscheinlichkeit $0.74 \cdot \frac{0.25}{0.74} = 0.25$.

  Das dritte Qubit ist dann im Zustand

  $$\sqrt{\frac{0.74}{0.25}}\Big(\frac{0.3}{\sqrt{0.74}}\,|0\rangle + \frac{0.4}{\sqrt{0.74}}\,|1\rangle\Big) \;=\; 0.6\,|0\rangle + 0.8\,|1\rangle\,.$$

- $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{0.7^2}{0.74} = \frac{0.49}{0.74}$. Dieser Fall hat also insgesamt die Wahrscheinlichkeit $0.74 \cdot \frac{0.49}{0.74} = 0.49$.

  Das dritte Qubit ist dann sicher im Zustand $|1\rangle$.

Nach Messung von $|1\rangle$ beim ersten Qubit erhält man bei Messung des zweiten Qubits sicher $|1\rangle$. Dieser Fall hat also insgesamt die Wahrscheinlichkeit 0.26.

Das dritte Qubit ist dann im Zustand $\frac{1}{\sqrt{0.26}}\big(0.1\,|0\rangle + 0.5\,|1\rangle\big)$.

b)
- $|00\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $0.3^2 + 0.4^2 = 0.25$.

  Das dritte Qubit ist dann im Zustand

  $$\sqrt{\frac{1}{0.25}}\big(0.3\,|0\rangle + 0.4\,|1\rangle\big) \;=\; 0.6\,|0\rangle + 0.8\,|1\rangle\,.$$

- $|01\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $0.7^2 = 0.49$.

  Das dritte Qubit ist dann sicher im Zustand $|1\rangle$.

- $|10\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit 0.

- $|11\rangle$ erhält man mit Wahrscheinlichkeit $0.1^2 + 0.5^2 = 0.26$.

  Das dritte Qubit ist dann im Zustand $\sqrt{\frac{1}{0.26}}\big(0.1\,|0\rangle + 0.5\,|1\rangle\big)$.

Aufgabe 5

Auf einem 3-Qubit-Register wird das Gatter

$$U = P_X \otimes I \otimes P_Z \qquad \text{mit der Identität } I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

betrachtet.

a) Wie wirkt das Gatter auf die Basiszustände $|k\rangle_3$, $k = 0, \ldots, 7$?

b) Wie lautet eine entsprechende Abbildungsmatrix U?

Leiten Sie diese einerseits aus Ihren Angaben zu a) und andererseits als Tensorprodukt her.

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
|0\rangle_3 &= |000\rangle \mapsto |100\rangle = |4\rangle_3, & |1\rangle_3 &= |001\rangle \mapsto -|101\rangle = -|5\rangle_3,\\
|2\rangle_3 &= |010\rangle \mapsto |110\rangle = |6\rangle_3, & |3\rangle_3 &= |011\rangle \mapsto -|111\rangle = -|7\rangle_3,\\
|4\rangle_3 &= |100\rangle \mapsto |000\rangle = |0\rangle_3, & |5\rangle_3 &= |101\rangle \mapsto -|001\rangle = -|1\rangle_3,\\
|6\rangle_3 &= |110\rangle \mapsto |010\rangle = |2\rangle_3, & |7\rangle_3 &= |111\rangle \mapsto -|011\rangle = -|3\rangle_3.
\end{aligned}$$

b) Durch die Angaben zu a) erhält man die einzelnen Spalten von U, also

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies erhält man auch durch

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Betrachtet wird die Hadamard-Matrix $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Berechenen Sie $H^{\otimes 2} = H \otimes H$ und $H^{\otimes 3} = H \otimes H \otimes H$.

b) Berechnen Sie $H^{\otimes 3}\,|000\rangle$

b1) durch Ausmultiplizieren von $\big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big)$,

b2) durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Transformationsmatrix zu $H^{\otimes 3}$.

c) Überlegen Sie sich, dass gilt

$$H^{\otimes n}\,|0\rangle_n = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle_n\,.$$

Lösung:

a) $$H^{\otimes 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H^{\otimes 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big) \otimes \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big) \otimes \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big) = \frac{1}{2^{3/2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$

Dies entspricht genau der ersten Spalte von $H^{\otimes 3}$, was wiederum $H^{\otimes 3}$ multipliziert mit dem ersten Einheitsvektor, also mit $|000\rangle$ entspricht.

c) Bei dem n-fachen Tensorprodukt von $H\,|0\rangle$, also

$$\big(H\,|0\rangle\big) \otimes \ldots \otimes \big(H\,|0\rangle\big) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big) \otimes \ldots \otimes \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big),$$

erhält man einen Vorfaktor $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{2^{n/2}}$ und einen 2^n-dimensionalen Vektor, der aus lauter Einsen besteht, was man als Summe über alle Einheitsvektoren, also als $\sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle_n$ auffassen kann.

Alternativ kann man $H^{\otimes n}\,|0\rangle_n$ als erste Spalte der Transformationsmatrix zu $H^{\otimes n}$ betrachten. Bei diesem n-fachen Produkt von $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ sammelt man n Faktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ auf, also insgesamt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{2^{n/2}}$. Bildet man nach und nach die Tensorprodukte $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)^{\otimes k}$, so sieht man wie bei a) dass die erste Spalte aus lauter Einsen besteht.

Aufgabe 7 (mit Qiskit, 4 Punkte)

Erzeugen Sie mit Qiskit

a) den Zustand $H^{\otimes 4}\,|0000\rangle$ (vgl. Aufgabe 6)

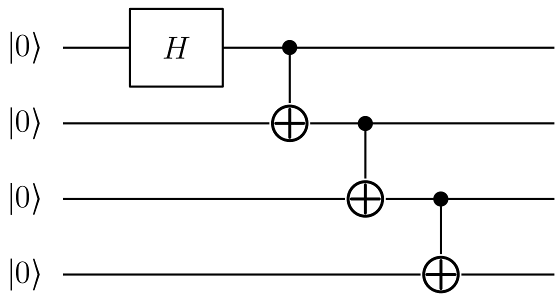
b) den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0000\rangle + |1111\rangle\big)$.

Experimentieren Sie, was passiert, wenn Sie die Schaltung zu b) auf einen Zustand wie in a) erzeugt anwenden.

Lösung:

Den Zustand $H^{\otimes 4}\,|0000\rangle$ erzeugt man, indem man das Hadamard-Gatter auf alle vier mit $|0\rangle$ initialisierten Qubits anwendet. Das Resultat ist eine Gleichverteilung unter allen möglichen 16 Zuständen.

Den Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0000\rangle + |1111\rangle\big)$ erzeugt man beispielsweise durch

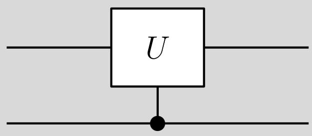


Alternativ kann man auch bei allen CNOT-Gattern das oberste Qubit als Kontroll-Qubit nehmen.

Initialisiert man alle oder die unteren drei Qubits mit $|+\rangle$ (oder fügt man - äquivalent - bei einer $|0\rangle$-Initialisierung Hadamard-Gatter nach der Initialisierung hinzu), so sieht man, dass die CNOT-Gatter keinen Effekt haben.

Aufgabe 8

Wie sieht die Transformationsmatrix T zu einem kontrollierten U-Gatter aus, wenn das zweite Qubit das Kontroll-Bit ist und $U = \left(\begin{smallmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{smallmatrix}\right)$ auf das erste Qubit wirken soll?



Lösung:

Die Transformationsmatrix wird spaltenweise aus den Bildern der Einheitsvektoren gebildet. Ist das zweite Qubit gleich $|0\rangle$, also beim ersten und dritten Einheitsvektor, passier nichts:

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |10\rangle \mapsto |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten und vierten Einheitsvektor gilt

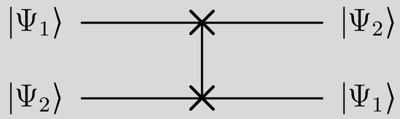
$$|01\rangle \mapsto \big(U\,|0\rangle\big) \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{10} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{00} \\ 0 \\ u_{10} \end{pmatrix},$$

$$|11\rangle \mapsto \big(U\,|1\rangle\big) \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{11} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{01} \\ 0 \\ u_{11} \end{pmatrix}.$$

Also ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{00} & 0 & u_{01} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u_{10} & 0 & u_{11} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9

Rechnen Sie nach, dass das Swap-Gatter tatsächlich zwei Qubits vertauscht,



d.h., wenn das 2-Qubit-Register vorher im Zustand $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ mit

$$|\Psi_1\rangle = \alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle \qquad \text{und} \qquad |\Psi_2\rangle = \alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle$$

ist, so befindet es sich anschließend im Zustand $|\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_1\rangle$.

Lösung:

Der Zustand

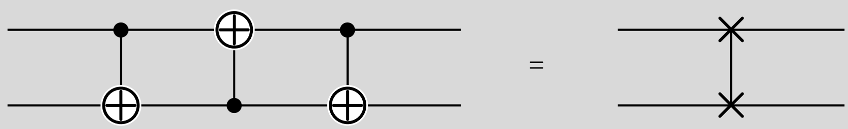
$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle &= \big(\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle\big) \otimes \big(\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle\big) \\ &= \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \alpha_1\beta_2 |01\rangle + \beta_1\alpha_2 |10\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle \end{aligned}$$

wird durch das Swap-Gatter zu

$$\begin{aligned} & \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \alpha_1\beta_2 |10\rangle + \beta_1\alpha_2 |01\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle \\ = \; & \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \beta_1\alpha_2 |01\rangle + \alpha_1\beta_2 |10\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle \\ = \; & \big(\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle\big) \otimes \big(\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle\big) = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Überzeugen Sie sich davon, dass der links dargestellte Schaltkreis das Gleiche bewirkt wie ein Swap-Gatter:



Lösung:

Es reicht, sich zu überlegen, dass die Wirkung auf die Einheitsvektoren die gleichen sind. Betrachtet man im linken Schaltkreis die CNOT-Operationen einzeln als Abbildung (im folgenden durch „↦“ markiert), so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\mapsto |00\rangle \mapsto |00\rangle \mapsto |00\rangle\,,\\
|01\rangle &\mapsto |01\rangle \mapsto |11\rangle \mapsto |10\rangle\,,\\
|10\rangle &\mapsto |11\rangle \mapsto |01\rangle \mapsto |01\rangle\,,\\
|11\rangle &\mapsto |10\rangle \mapsto |10\rangle \mapsto |11\rangle\,,
\end{aligned}
$$

was genau der Swap-Wirkung entspricht.

Man kann diese Überlegung in einem auch in folgender Form durchführen: Für $x, y \in \{0,1\}$ wirkt CNOT durch $\mathrm{CNOT}(x,y) = (x, y \oplus x)$. Damit ergibt sich

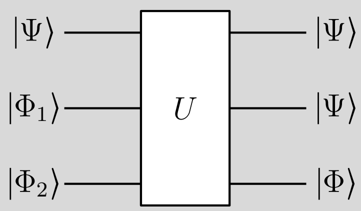
$$(x,y) \mapsto (x, y \oplus x) \mapsto (x \oplus (y \oplus x), y \oplus x) = (y, y \oplus x) \mapsto (y, y \oplus x \oplus y) = (y, x).$$

Alternativ kann man dies mittels entsprechende Matrix-Multiplikation der Transformationsmatrizen überprüfen.

Aufgabe 11

Überlegen Sie sich, dass es keine Transformation auf einem 3-Qubit-Register geben kann, das bei speziellem zweiten und dritten Eingangs-Qubit $|\Phi_1\rangle$ und $|\Phi_2\rangle$ das erste Qubit $|\Psi\rangle$ kopiert, also

$$\text{Für alle } |\Psi\rangle \text{ gilt:} \quad U\big(|\Psi\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\big) = |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle\,.$$



(Dabei darf $|\Phi\rangle$ von $|\Psi\rangle$ abhängen.)

Lösung:

Annahme: So eine Transformation gibt es.

Dann gilt

$$U\big(|0\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\big) = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \big|\Phi_{|0\rangle}\big\rangle \qquad \text{und}$$

$$U\big(|1\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\big) = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \big|\Phi_{|1\rangle}\big\rangle\,.$$

Sei nun $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)$.

Dann gilt einerseits wegen der Linearität

$$\begin{aligned} U\Big(\,|\Psi\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\,\Big) &= U\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(U\big(\,|0\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\,\big) + U\big(\,|1\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\,\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \big|\Phi_{|0\rangle}\big\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes \big|\Phi_{|1\rangle}\big\rangle\Big). \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits gilt wegen der Kopier-Eigenschaft

$$\begin{aligned} U\Big(\,|\Psi\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\,\Big) &= |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |\Phi_\Psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |\Phi_\Psi\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\,|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\,\big) \otimes |\Phi_\Psi\rangle\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dies sind aber offensichtlich verschiedene Zustände, denn beispielsweise ergibt eine Messung der ersten beiden Qubits bei (1) nur die Fälle $|00\rangle$ und $|11\rangle$, während bei (2) auch $|01\rangle$ und $|10\rangle$ vorkommen können.

Damit hat man einen Widerspruch; eine solche Transformation kann es also nicht geben.