

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

#### Aufgabe 1

Betrachtet werden die Zustände

$$|\Psi_1\rangle = 0.7|00\rangle + 0.1|01\rangle + 0.5|10\rangle + 0.5|11\rangle,$$

$$|\Psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{15}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|01\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|10\rangle + \sqrt{\frac{4}{15}}|11\rangle.$$

Das zweite Qubit wird jeweils gemessen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man  $|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle$ , und welche Zustände erhält man dann?

Was fällt bei  $|\Psi_2\rangle$  auf? Haben Sie eine Erklärung?

#### Lösung:

Bei  $|\Psi_1\rangle$ :

- Man erhält  $|0\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $0.7^2 + 0.5^2 = 0.74$ ; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{0.74}}(0.7|00\rangle + 0.5|10\rangle) \approx (0.81|0\rangle + 0.58|1\rangle) \otimes |0\rangle.$$

- Man erhält  $|1\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $0.1^2 + 0.5^2 = 0.26$ ; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{0.26}}(0.1|01\rangle + 0.5|11\rangle) \approx (0.20|0\rangle + 0.98|1\rangle) \otimes |1\rangle.$$

Bei  $|\Psi_2\rangle$ :

- Man erhält  $|0\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{2/3}}\left(\sqrt{\frac{2}{15}}|00\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|10\rangle\right) = \left(\sqrt{\frac{1}{5}}|0\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}}|1\rangle\right) \otimes |0\rangle.$$

- Man erhält  $|1\rangle$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{1/3}} \left( \sqrt{\frac{1}{15}} |01\rangle + \sqrt{\frac{4}{15}} |11\rangle \right) = \left( \sqrt{\frac{1}{5}} |0\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |1\rangle \right) \otimes |1\rangle.$$

Die resultierenden Zustände sind im ersten Qubit gleich. Das liegt daran, dass  $|\Psi_2\rangle$  separabel ist:

$$|\Psi_2\rangle = \left( \sqrt{\frac{1}{5}} |0\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |1\rangle \right) \otimes \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1\rangle \right).$$

Beim Messen erhält man entsprechend des zweiten Qubits  $|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  bzw.  $\frac{1}{3}$ ; beim Messen bleibt das erste Qubit unverändert erhalten.

### Aufgabe 2

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Berechnen Sie  $A \otimes B$  und  $B \otimes A$ .

b) Sei  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie  $(A \cdot a) \otimes (B \cdot b)$  und  $(A \otimes B) \cdot (a \otimes b)$ .

### Lösung:

a)

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \otimes A &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b)

$$(A \cdot a) \otimes (B \cdot b)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -12 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B) \cdot (a \otimes b) = (A \otimes B) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -12 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 3

a) Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie  $(A \cdot B) \otimes (S \cdot T)$  und  $(A \otimes S) \cdot (B \otimes T)$ .

b) Sei  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 3}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{3 \times 5}$ ,  $S \in \mathbb{C}^{4 \times 6}$  und  $T \in \mathbb{C}^{6 \times 7}$ .

Welche Dimensionen ergeben sich bei der Berechnung von

$$(A \cdot B) \otimes (S \cdot T) \quad \text{bzw.} \quad (A \otimes S) \cdot (B \otimes T)?$$

Kontrollieren Sie auch, dass man die Produkte alle bilden kann.

### Lösung:

a)

$$(A \cdot B) \otimes (S \cdot T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes S) \cdot (B \otimes T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 16 & 12 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen der gemeinsamen Dimension 3 kann man  $A \cdot B$  bilden und erhält eine Matrix aus  $\mathbb{C}^{2 \times 5}$ .

Wegen der gemeinsamen Dimension 6 kann man  $S \cdot T$  bilden und erhält eine Matrix aus  $\mathbb{C}^{4 \times 7}$ .

Das Tensorprodukt  $(A \cdot B) \otimes (S \cdot T)$  hat dann die Dimension  $(2 \cdot 4) \times (5 \cdot 7) = 8 \times 35$ .

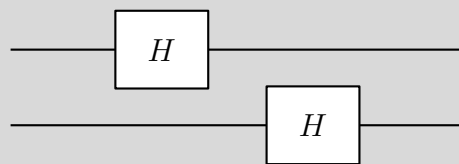
Das Tensorprodukt  $A \otimes S$  hat die Dimension  $(2 \cdot 4) \times (3 \cdot 6) = 8 \times 18$ .

Das Tensorprodukt  $B \otimes T$  hat die Dimension  $(3 \cdot 6) \times (5 \cdot 7) = 18 \times 35$ .

Wegen der gemeinsamen Dimension 18 kann man  $(A \otimes S) \cdot (B \otimes T)$  bilden und erhält eine Matrix aus  $\mathbb{C}^{8 \times 35}$ .

#### Aufgabe 4

Statt der (gleichzeitigen) Ausführung der Hadamard-Transformation auf die beiden Qubits eines 2-Qubit-Registers sollen die Transformationen nacheinander durchgeführt werden: Zunächst für das erste, dann für das zweite Qubit.



- Wie lauten die einzelnen  $(4 \times 4)$ -Transformationsmatrizen, also für die Hadamard-Transformation nur für das erste bzw. nur für das zweite Qubit?
- Wie berechnet sich dadurch die Gesamt-Transformationsmatrix?

#### Lösung:

- Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das erste Qubit ist

$$U = H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das zweite Qubit ist

$$V = I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Gesamt-Transformationsmatrix berechnet sich durch (beachte die Reihenfolge!)

$$V \cdot U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

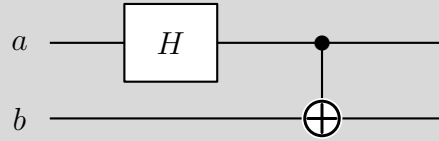
was  $H \otimes H$  entspricht.

Dies erhält man auch durch die Rechnung

$$(I \otimes H) \cdot (H \otimes I) = (I \cdot H) \otimes (H \cdot I) = H \otimes H.$$

### Aufgabe 5

Das Blockschaltbild rechts erzeugt beim Eingangszustand  $a \otimes b = |0\rangle \otimes |0\rangle$  den Bell-Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ .



Welche Zustände ergeben sich bei

$$a \otimes b = |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad a \otimes b = |1\rangle \otimes |0\rangle \quad \text{bzw.} \quad a \otimes b = |1\rangle \otimes |1\rangle?$$

Überlegen Sie sich das Ergebnis

- durch „Verfolgung“ der einzelnen Qubits bzw. des gesamten Zustands,
- durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der entsprechenden Transformationsmatrix  $T$ .

Berechnen Sie jeweils die Concurrence der Ergebnis-Zustände.

Zur Information: Auch diese resultierenden Zustände nennt man *Bell-Zustände*.

### Lösung:

a) Sei  $|\Psi\rangle$  der Zustand nach Anwendung des Hadamard-Gatters auf das erste Qubit.

- Bei  $a \otimes b = |0\rangle \otimes |1\rangle$  ist  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)$ .

Das Ergebnis ist also  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ .

- Bei  $a \otimes b = |1\rangle \otimes |0\rangle$  ist  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$ .

Das Ergebnis ist also  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ .

- Bei  $a \otimes b = |1\rangle \otimes |1\rangle$  ist  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$ .

Das Ergebnis ist also  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ .

b) Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das erste Qubit ist

$$U = H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$T = \text{CNOT} \cdot U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

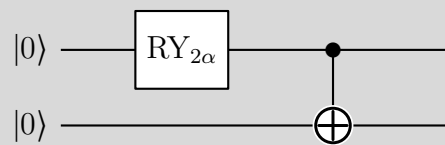
Da  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  bzw.  $|11\rangle$  dem zweiten, dritten bzw. vierten Einheitsvektor entspricht, erhält man das Ergebnis durch Multiplikation von  $T$  mit dem entsprechenden Einheitsvektor; dies ergibt die entsprechende Spalte von  $T$ .

Für jeden Ergebniszustände erhält man die Concurrence 1, d.h., die Zustände sind maximal verschränkt.

### Aufgabe 6

Welcher Zustand wird durch den Schaltkreis rechts (in Abhängigkeit von  $\alpha$ ) erzeugt?

Wie groß ist dessen Concurrence?



### Lösung:

Nach dem  $\text{RY}_{2\alpha}$ -Gatter hat man den Zustand

$$(\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) \otimes |0\rangle = \cos \alpha |00\rangle + \sin \alpha |10\rangle.$$

Durch das CNOT-Gatter wird dies zu

$$|\Psi\rangle = \cos \alpha |00\rangle + \sin \alpha |11\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Concurrence von  $|\Psi\rangle$  ist (wegen  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ )

$$C(|\Psi\rangle) = 2 \cdot |\cos \alpha \cdot \sin \alpha - 0 \cdot 0| = |\sin(2\alpha)|.$$

### Aufgabe 7 (mit Qiskit, 5 Punkte)

Experimentieren Sie in Qiskit, mit welchem Schaltkreis man den Zustand

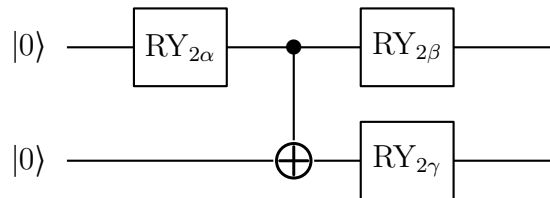
$$|\Psi\rangle = \frac{2}{3}|00\rangle + \frac{2}{3}|10\rangle + \frac{1}{3}|11\rangle$$

erzeugen kann.

Tipp: Die Concurrence von  $|\Psi\rangle$  und Aufgabe 6 können beim Experimentieren hilfreich sein.

#### Lösung:

Eine Idee ist, eine Schaltung ähnlich wie bei Aufgabe 6 zu nehmen, und anschließend auf den beiden Qubits geeignete Drehungen durchzuführen, also:



Da die Concurrence unabhängig von der Anwendung von Transformationen auf einzelnen Qubits ist, ist die Concurrence des resultierenden Zustands nicht abhängig von  $\beta$  und  $\gamma$ , also nur abhängig von  $\alpha$ . Entsprechend Aufgabe 6 ist sie gleich  $\sin(2\alpha)$ . Dies muss der Concurrence von  $|\Psi\rangle$  entsprechen. Wegen

$$C(|\Psi\rangle) = 2 \cdot \left| \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - 0 \cdot \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{9}$$

ist

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{4}{9} \approx 0.23.$$

Nun kann man mit  $\beta$  und  $\gamma$  experimentieren.

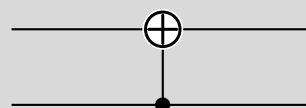
Tatsächlich kann man mit

$$\beta \approx 1.695154 \quad \text{und} \quad \gamma \approx 0.519154$$

eine Einstellung finden, die  $|\Psi\rangle$  erzeugt.

### Aufgabe 8

Wie lautet die Transformationsmatrix  $\text{CNOT}_{2 \rightarrow 1}$  zu einer CNOT-Transformation, bei der das zweite Qubit das Kontroll-Qubit und das erste das Ziel-Qubit ist?



**Lösung:**

Die Basiszustände werden folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle \mapsto |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle \mapsto |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

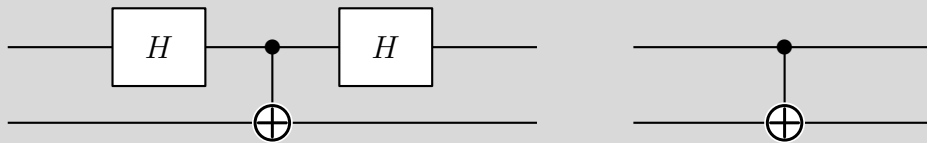
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle \mapsto |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle \mapsto |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{CNOT}_{2 \rightarrow 1}$  ergibt sich aus den entsprechenden Spalten:

$$\text{CNOT}_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 9**

Betrachtet werden die beiden dargestellten Schaltkreise:



Überlegen Sie sich, dass zwar die zweifache Anwendung des Hadamard-Gatters den Ursprungszustand liefert, dass aber die beiden Schaltkreise unterschiedlich sind.

**Lösung:**

Beispielsweise wird  $|00\rangle$  im linken Schaltkreis durch das Hadamard-Gatter und CNOT aus den Bell-Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  abgebildet. Das zweite Hadamard-Gatter führt dann zu

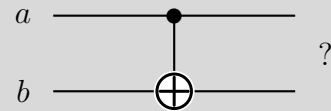
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle \right) = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle),$$

während  $|00\rangle$  im rechten Schaltkreis unverändert bleibt.

### Aufgabe 10 (doppelte Punktzahl)

Welche Zustände ergeben sich durch ein CNOT-Gatter angewendet auf  $a \otimes b$  mit  $a, b \in \{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$  und  $a$  als Kontroll-Qubit und  $b$  als Ziel-Qubit. Berechnen Sie die entsprechenden Tabelleneinträge.

	$a =  0\rangle$	$a =  1\rangle$	$a =  +\rangle$	$a =  -\rangle$
$b =  0\rangle$				
$b =  1\rangle$				
$b =  +\rangle$				
$b =  -\rangle$				



Welche der resultierenden Zustände sind separabel? Stellen Sie in dem Fall das Ergebnis als entsprechendes Tensorprodukt an.

#### Lösung:

- Für  $a = |0\rangle$  bleibt  $b$  unverändert; man erhält also  $|0\rangle \otimes b$ .
- Für  $a = |1\rangle$  flippen  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  bei  $b$ :

$$|0\rangle \mapsto |1\rangle, \quad |1\rangle \mapsto |0\rangle,$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) = |+\rangle,$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) = -|-\rangle.$$

Dabei bleibt der Zustand unverschränkt.

- Für  $a = |+\rangle$  oder  $a = |-\rangle$  und  $b = |0\rangle$  oder  $b = |1\rangle$  erhält man die maximal verschränkten Bell-Zustände:

$$|+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

$$|+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle).$$

$$|-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle).$$

$$|-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

- Ist  $b = |+\rangle$ , so ändert sich  $b$  weder bei  $a = |0\rangle$  noch bei  $a = |1\rangle$ , also auch nicht bei irgendeiner Überlagerung, insbesondere auch nicht bei  $a = |+\rangle$  oder  $a = |-\rangle$ .

- Für  $a = |+\rangle$  und  $b = |-\rangle$  erhält man

$$\begin{aligned}
|+\rangle \otimes |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\
&\mapsto \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \otimes |-\rangle.
\end{aligned}$$

- Ähnlich kann man nachrechnen, dass  $|-\rangle \otimes |-\rangle$  auf  $|+\rangle \otimes |-\rangle$  abgebildet wird. Das ergibt sich aus der dem vorherigen Punkt und der Tatsache, dass  $U$  zu sich selbst invers ist.

Insgesamt erhält man die folgende Tabelle:

	$a =  0\rangle$	$a =  1\rangle$	$a =  +\rangle$	$a =  -\rangle$
$b =  0\rangle$	$ 00\rangle$	$ 11\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$
$b =  1\rangle$	$ 01\rangle$	$ 10\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle +  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$
$b =  +\rangle$	$ 0\rangle \otimes  +\rangle$	$ 1\rangle \otimes  +\rangle$	$ +\rangle \otimes  +\rangle$	$ -\rangle \otimes  +\rangle$
$b =  -\rangle$	$ 0\rangle \otimes  -\rangle$	$- 1\rangle \otimes  -\rangle$	$ -\rangle \otimes  -\rangle$	$ +\rangle \otimes  -\rangle$