

2. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Sei

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{und} \quad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

Berechnen Sie $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ als Überlagerung der Basiszustände und rechnen Sie konkret nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|11\rangle \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der Vorfaktoren ist

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 1.$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Lösung:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \\ 3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ -12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Betrachtet werden die Zustände

$$|\Psi_1\rangle = 0.7|00\rangle + 0.1|01\rangle + 0.5|10\rangle + 0.5|11\rangle,$$

$$|\Psi_2\rangle = 0.8|00\rangle + 0.4|01\rangle + 0.4|10\rangle + 0.2|11\rangle.$$

- Rechnen Sie jeweils nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.
- Berechnen Sie die Concurrence der beiden Zustände.
- Welcher der beiden Zustände ist separabel? Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an.

Lösung:

- $0.7^2 + 0.1^2 + 0.5^2 + 0.5^2 = 0.49 + 0.01 + 0.25 + 0.25 = 1.$
 - $0.8^2 + 0.4^2 + 0.4^2 + 0.2^2 = 0.64 + 0.16 + 0.16 + 0.04 = 1.$
- $C(|\Psi_1\rangle) = 2 \cdot |0.7 \cdot 0.5 - 0.1 \cdot 0.5| = 2 \cdot 0.3 = 0.6.$
 $C(|\Psi_2\rangle) = 2 \cdot |0.8 \cdot 0.2 - 0.4 \cdot 0.4| = 2 \cdot |0.16 - 0.16| = 0.$
- $|\Psi_2\rangle$ ist separabel. Es ist

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Für den Zustand $|\Psi\rangle$ eines 2-Qubit-Quantenregisters gelte

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie die Normierungsbedingung von $|\Psi\rangle$, um zu zeigen, dass es ein μ gibt, so dass die Vektoren $\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$ die Länge 1 haben, man also

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \right),$$

als Tensorprodukt zweier Qubits darstellen kann.

Lösung:

Wegen der Normierung von $|\Psi\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} 1 &= |\gamma_{00}|^2 + |\gamma_{01}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= |\lambda\gamma_{10}|^2 + |\lambda\gamma_{11}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= |\lambda|^2 \cdot (|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2) + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= (|\lambda|^2 + 1) \cdot (|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2). \end{aligned} \quad (*)$$

Damit $\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat, kann man $\mu = \frac{1}{\sqrt{|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2}}$ wählen. Dann ist

$$\left\| \frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{1/\sqrt{|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2}} \cdot \sqrt{|\lambda|^2 + 1} = \sqrt{|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2} \cdot \sqrt{|\lambda|^2 + 1},$$

was wegen (*) gleich 1 ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Concurrence immer kleiner oder gleich 1 ist, also dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ gilt:

$$2 \cdot |ad - bc| \leq 1.$$

Tipp: Ersetzen Sie die 1 rechts durch die Normierungsbedingung, quadrieren Sie ggf. beide Seiten, bringen Sie alles auf eine Seite und suchen Sie mittels geeigneter binomischer Formeln nach quadratischen Ausdrücken.

Lösung:

Entsprechend des Tipps reicht es zu zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} (2 \cdot |ad - bc|)^2 &\leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - (2 \cdot |ad - bc|)^2. \end{aligned} \quad (*)$$

Es ist

$$(2 \cdot |ad - bc|)^2 = 4 \cdot ((ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2) = 4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2c^2$$

und

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - (2 \cdot |ad - bc|)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 \\ &\quad - (4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2c^2) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd \\ &= (a^4 - 2a^2d^2 + d^4) + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) \\ &\quad + 2(a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2) + 2(a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) \\ &= (a^2 - d^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2(ab + cd)^2 + 2(ac + bd)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Alternative:

Den Betrag auf der rechten Seite von (*) kann man wegen des Quadrats weglassen; dann kann man mittels der dritten binomischen Formel umwandeln:

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - (2 \cdot (ad - bc))^2 \\ &= \left((a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + (2 \cdot (ad - bc)) \right) \cdot \left((a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (2 \cdot (ad - bc)) \right) \\ &= (a^2 + 2ad + d^2 + b^2 - 2bc + c^2) \cdot (a^2 - 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2) \\ &= \left((a + d)^2 + (b - c)^2 \right) \cdot \left((a - d)^2 + (b + c)^2 \right) \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich größer oder gleich Null.

Weitere Alternative ohne initiales Quadrieren:

Ist $ad - bc \geq 0$, so ist $|ad - bc| = ad - bc$ und zu zeigen ist

$$\begin{aligned} 2(ad - bc) &\leq 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ad - bc) \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= (a - d)^2 + (b + c)^2, \end{aligned}$$

was offensichtlich stimmt.

Ist $ad - bc \geq 0$, so ist $|ad - bc| = -(ad - bc) = bc - ad$ und man rechnet ähnlich nach, dass die Ungleichung stimmt.

Aufgabe 6

Betrachtet wird der (maximal verschränkte) Bell-Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

- Auf das erste Qubit wird ein $\text{RY}_{2\alpha}$ -Gatter angewendet, also eine Drehung um den Winkel α . Zeigen Sie, dass der resultierende Zustand auch maximal verschränkt ist.
- Welchen Zustand erhält man, wenn man auf beide Qubits ein $\text{RY}_{2\alpha}$ -Gatter anwendet?

Lösung:

a) Es ist $\text{RY}_{2\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, also

$$\text{RY}_{2\alpha}|0\rangle = \cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle \quad \text{und} \quad \text{RY}_{2\alpha}|1\rangle = -\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle,$$

so dass man folgenden Zustand erhält:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) \otimes |0\rangle + (-\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \otimes |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha |00\rangle + \sin \alpha |10\rangle - \sin \alpha |01\rangle + \cos \alpha |11\rangle). \end{aligned}$$

Die Concurencs dieses Zustands ist

$$2 \cdot \left| \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} - \frac{-\sin \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \right| = 2 \cdot \left| \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2} \right| = 1,$$

d.h., der Zustand ist weiter maximal verschränkt.

b) Man erhält

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) \otimes (\cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle) \right. \\
 & \quad \left. + (-\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \otimes (-\sin \alpha |0\rangle + \cos \alpha |1\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^2 \alpha |00\rangle + \cos \alpha \sin \alpha (|01\rangle + |10\rangle) + \sin^2 \alpha |11\rangle \right. \\
 & \quad \left. + \sin^2 \alpha |00\rangle - \cos \alpha \sin \alpha (|01\rangle + |10\rangle) + \cos^2 \alpha |11\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle),
 \end{aligned}$$

also wieder den ursprünglichen Bell-Zustand.

Aufgabe 7

Betrachtet wird

$$|\Psi_0\rangle = \frac{2}{3}|00\rangle + \frac{1}{3}|01\rangle - \frac{2}{3}|11\rangle.$$

Nun wird auf das erste Qubit die Transformation U_1 und auf das zweite Qubit die Transformation U_2 mit

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

angewendet.

- Welchen Zustand $|\Psi_1\rangle$ hat man nach Anwendung der Transformationen?
- Berechnen Sie die Concurrence von $|\Psi_0\rangle$ und von $|\Psi_1\rangle$.

Lösung:

a) Wegen

$$\begin{aligned}
 U_1 |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |1\rangle, & U_1 |1\rangle &= -\frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle, \\
 U_2 |0\rangle &= \frac{3}{\sqrt{10}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{10}} |1\rangle, & U_2 |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}} |0\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}} |1\rangle
 \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |1\rangle \right) \otimes \left(\frac{3}{\sqrt{10}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{10}} |1\rangle \right) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{10}} |0\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}} |1\rangle \right) \\
&\quad - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{10}} |0\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}} |1\rangle \right) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} (1|0\rangle + 2|1\rangle) \otimes (3|0\rangle - 1|1\rangle) \\
&\quad + \frac{1}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} (1|0\rangle + 2|1\rangle) \otimes (1|0\rangle + 3|1\rangle) \\
&\quad - \frac{2}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} (-2|0\rangle + 1|1\rangle) \otimes (1|0\rangle + 3|1\rangle) \\
&= \frac{1}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} \left(2(3|00\rangle - 1|01\rangle + 6|10\rangle - 2|11\rangle) \right. \\
&\quad \left. + 1|00\rangle + 3|01\rangle + 2|10\rangle + 6|11\rangle \right. \\
&\quad \left. - 2(-2|00\rangle - 6|01\rangle + 1|10\rangle + 3|11\rangle) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{450}} \left(6|00\rangle - 2|01\rangle + 12|10\rangle - 4|11\rangle \right. \\
&\quad \left. + 1|00\rangle + 3|01\rangle + 2|10\rangle + 6|11\rangle \right. \\
&\quad \left. + 4|00\rangle + 12|01\rangle - 2|10\rangle - 6|11\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{450}} (11|00\rangle + 13|01\rangle + 12|10\rangle - 4|11\rangle)
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$C(|\Psi_0\rangle) = 2 \cdot \left| \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 0 \cdot \frac{1}{3} \right| = \frac{8}{9}$$

und

$$\begin{aligned}
C(|\Psi_1\rangle) &= 2 \cdot \left| \frac{11}{\sqrt{450}} \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{450}}\right) - \frac{13}{\sqrt{450}} \cdot \frac{12}{\sqrt{450}} \right| \\
&= \frac{2}{450} \cdot |-44 - 156| = \frac{2}{450} \cdot 200 = \frac{8}{9} = C(|\Psi_0\rangle).
\end{aligned}$$