Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2025
25.06.2025

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Quanten-Computing

Aufgabe 1

a) Wie lautet die Matrix D zur Rücktransformation bei der diskreten Fourier-Transformation zu 8 Werten?

b) Bestimmen Sie die Rücktransformation zu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T.$$

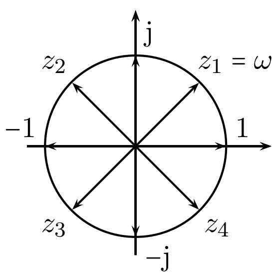
Lösung:

a) Mit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{8}}$ ist

$$D = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega^{10} & \omega^{12} & \omega^{14} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} & \omega^{15} & \omega^{24} & \omega^{21} \\ \omega^0 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} & \omega^{20} & \omega^{30} & \omega^{28} \\ \omega^0 & \omega^5 & \omega^{10} & \omega^{15} & \omega^{20} & \omega^{25} & \omega^{36} & \omega^{35} \\ \omega^0 & \omega^6 & \omega^{12} & \omega^{18} & \omega^{24} & \omega^{30} & \omega^{42} & \omega^{42} \\ \omega^0 & \omega^7 & \omega^{14} & \omega^{21} & \omega^{28} & \omega^{35} & \omega^{48} & \omega^{49} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$z_1 = \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j},$$
$$z_2 = \omega^3 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j},$$
$$z_3 = \omega^5 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j},$$
$$z_4 = \omega^7 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}$$



und

$$\omega^0 = 1, \quad \omega^2 = \mathrm{j}, \quad \omega^4 = -1, \quad \omega^6 = -\mathrm{j}$$

und wegen $\omega^8 = 1$ erhält man

$$D = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & \mathrm{j} & z_2 & -1 & z_3 & -\mathrm{j} & z_4 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} & 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \\ 1 & z_2 & -\mathrm{j} & z_1 & -1 & z_4 & \mathrm{j} & z_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & z_3 & \mathrm{j} & z_4 & -1 & z_1 & -\mathrm{j} & z_2 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} & 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & z_4 & -\mathrm{j} & z_3 & -1 & z_2 & \mathrm{j} & z_1 \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht der Matrix C^H zu der im Skript angegebenen Transformationsmatrix C für 8 Werte.

b) Die rück-transformierten Werte lauten

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & \mathrm{j} & z_2 & -1 & z_3 & -\mathrm{j} & z_4 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} & 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \\ 1 & z_2 & -\mathrm{j} & z_1 & -1 & z_4 & \mathrm{j} & z_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & z_3 & \mathrm{j} & z_4 & -1 & z_1 & -\mathrm{j} & z_2 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} & 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & z_4 & -\mathrm{j} & z_3 & -1 & z_2 & \mathrm{j} & z_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\mathrm{j} \\ 0 \\ 1-\mathrm{j} \\ 2 \\ 1+\mathrm{j} \\ 0 \\ 1-\mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Testen Sie exemplarisch, dass die Spalten der Rücktransformationsmatrix D der diskreten Fourier-Transformation für $N = 8$ paarweise senkrecht aufeinander stehen.

b) Zeigen Sie allgemein, dass die Spalten der Rücktransformationsmatrix D der diskreten Fourier-Transformation für N Werte paarweise senkrecht aufeinander stehen. (Tipp: Partialsummenformel für eine geometrische Reihe!)

Hinweis: Beim Skalarprodukt von Vektoren mit komplexen Einträgen muss der erste Faktor jeweils konjugiert komplex genommen werden!

Lösung:

a) Nach Aufgabe 1 und mit den dort definierten z_1, z_2, z_3 und z_4 ist

$$D = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & \mathrm{j} & z_2 & -1 & z_3 & -\mathrm{j} & z_4 \\ 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} & 1 & \mathrm{j} & -1 & -\mathrm{j} \\ 1 & z_2 & -\mathrm{j} & z_1 & -1 & z_4 & \mathrm{j} & z_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & z_3 & \mathrm{j} & z_4 & -1 & z_1 & -\mathrm{j} & z_2 \\ 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} & 1 & -\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ 1 & z_4 & -\mathrm{j} & z_3 & -1 & z_2 & \mathrm{j} & z_1 \end{pmatrix}.$$

Man sieht beispielsweise leicht, dass die Summe aller Elemente bei den Spalten 2 bis 8 gleich Null sind, was bedeutet, dass diese Spalten senkrecht zur ersten Spalte sind.

Auch bei den paarweisen Skalarprodukte der dritten, fünften und siebten Spalte sieht man leicht, dass sie gleich Null sind.

b) Mit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{N}}$ sind die Elemente der k-ten Spalte abgesehen vom Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\omega^{k\cdot 0},\ \omega^{k\cdot 1},\ \omega^{k\cdot 2},\ \ldots,\ \omega^{k\cdot(N-1)}.$$

Das Skalarprodukt $s_{k,l}$ aus k-ter und l-ter Spalte wird also zu

$$\begin{aligned} s_{k,l} &= \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{k\cdot n}\Big)^* \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{l\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-k\cdot n}\cdot\omega^{l\cdot n} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{(l-k)\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \Big(\omega^{(l-k)}\Big)^n \end{aligned}$$

Die Summe entspricht der $(N-1)$-ten Partialsumme der geometrischen Reihe zu $q = \omega^{(l-k)}$. Bei unterschiedlichen $k, l \in \{0, \ldots, N-1\}$ ist $q \neq 1$ und damit entsprechend der Partialsummen-Formel der geometrischen Reihe

$$s_{k,l} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-q^{(N-1)+1}}{1-q} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-q^N}{1-q}.$$

Wegen

$$q^N = \Big(\omega^{(l-k)}\Big)^N = \Big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{N}}\Big)^{(l-k)\cdot N} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 2\pi\cdot(l-k)\cdot N} = 1$$

folgt $s_{k,l} = 0$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $N = 8$, also $n = 3$, konkret das Ergebnis der QFT_8 angewendet auf den Basiszustand $|2\rangle_3$ bzw. auf den Basiszustand $|5\rangle_3$, also $\mathrm{QFT}_8(|2\rangle_3)$ bzw. $\mathrm{QFT}_8(|5\rangle_3)$

a) mittels der Definition aus Abschnitt 10.3 des Skripts,

b) mit der Formel aus dem Satz aus Abschnitt 10.3 des Skripts,

c) mit dem in Abschnitt 10.3 des Skripts angegebenen Schaltkreis.

Welchen klassischen Input- und Fourier-transformierten Werten entspricht dies?

Lösung:

a) Es ist $\omega_8 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{8}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{4}}$ und damit

$$\omega_8{}^2 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}, \quad \omega_8{}^4 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\pi} = -1,$$

$$\omega_8{}^6 = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^6 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{j} \quad \text{und} \quad \omega_8{}^8 = 1.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{QFT}_N(|2\rangle_3) &= \tfrac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sum_{k=0}^{7} \omega_8{}^{k\cdot 2} \cdot |k\rangle_3 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\omega_8{}^0 \cdot |0\rangle_3 + \omega_8{}^2 \cdot |1\rangle_3 + \omega_8{}^4 \cdot |2\rangle_3 + \omega_8{}^6 \cdot |3\rangle_3\,\big) \\
&\qquad + \omega_8{}^8 \cdot |4\rangle_3 + \omega_8{}^{10} \cdot |5\rangle_3 + \omega_8{}^{12} \cdot |6\rangle_3 + \omega_8{}^{14} \cdot |7\rangle_3\,\big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(1 \cdot |0\rangle_3 + \omega_8{}^2 \cdot |1\rangle_3 + \omega_8{}^4 \cdot |2\rangle_3 + \omega_8{}^6 \cdot |3\rangle_3\,\big) \\
&\qquad + 1 \cdot |4\rangle_3 + \omega_8{}^2 \cdot |5\rangle_3 + \omega_8{}^4 \cdot |6\rangle_3 + \omega_8{}^6 \cdot |7\rangle_3\,\big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\,|0\rangle_3 + \mathrm{j}\,|1\rangle_3 - |2\rangle_3 - \mathrm{j}\,|3\rangle_3 + |4\rangle_3 + \mathrm{j}\,|5\rangle_3 - |6\rangle_3 - \mathrm{j}\,|7\rangle_3\,\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{QFT}_N(|5\rangle_3) &= \tfrac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sum_{k=0}^{7} \omega_8{}^{k\cdot 5} \cdot |k\rangle_3 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\omega_8{}^0 \cdot |0\rangle_3 + \omega_8{}^5 \cdot |1\rangle_3 + \omega_8{}^{10} \cdot |2\rangle_3 + \omega_8{}^{15} \cdot |3\rangle_3\,\big) \\
&\qquad + \omega_8{}^{20} \cdot |4\rangle_3 + \omega_8{}^{25} \cdot |5\rangle_3 + \omega_8{}^{30} \cdot |6\rangle_3 + \omega_8{}^{35} \cdot |7\rangle_3\,\big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\omega_8{}^0 \cdot |0\rangle_3 + \omega_8{}^5 \cdot |1\rangle_3 + \omega_8{}^2 \cdot |2\rangle_3 + \omega_8{}^7 \cdot |3\rangle_3\,\big) \\
&\qquad + \omega_8{}^4 \cdot |4\rangle_3 + \omega_8{}^1 \cdot |5\rangle_3 + \omega_8{}^6 \cdot |6\rangle_3 + \omega_8{}^3 \cdot |7\rangle_3\,\big).
\end{aligned}$$

b) Mit der Formel aus dem Satz aus Abschnitt 10.3 des Skripts erhält man

$$\mathrm{QFT}_8(|2\rangle_3) = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \big(\,|0\rangle + \omega_2{}^2\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle + \omega_4{}^2\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle + \omega_8{}^2\,|1\rangle\,\big).$$

Dabei ist

$$\omega_2{}^2 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{2}}\right)^2 = e^{j\cdot 2\pi} = 1, \quad \omega_4{}^2 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{4}}\right)^2 = e^{j\cdot\pi} = -1 \qquad \text{und}$$

$$\omega_8{}^2 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^2 = e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = j,$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{QFT}_8(|2\rangle_3) &= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + j\,|1\rangle\,\big)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|000\rangle + j\,|001\rangle - |010\rangle - j\,|011\rangle\\
&\qquad + |100\rangle + j\,|101\rangle - |110\rangle - j\,|111\rangle\,\big)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\,|0\rangle_3 + j\,|1\rangle_3 - |2\rangle_3 - j\,|3\rangle_3 + |4\rangle_3 + j\,|5\rangle_3 - |6\rangle_3 - j\,|7\rangle_3\,\big).
\end{aligned}$$

Für $|5\rangle_3$ erhält man

$$\mathrm{QFT}_8(|5\rangle_3) = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|0\rangle + \omega_2{}^5\,|1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + \omega_4{}^5\,|1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + \omega_8{}^5\,|1\rangle\,\big).$$

Dabei ist

$$\omega_2{}^5 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{2}}\right)^5 = e^{j\cdot 5\pi} = -1, \quad \omega_4{}^5 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{4}}\right)^5 = e^{j\cdot\frac{5\pi}{2}} = j \qquad \text{und}$$

$$\omega_8{}^5 = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^5 = e^{j\cdot\frac{5\pi}{4}} = z_3 = -z_1 = -\omega_8,$$

also

$$\mathrm{QFT}_8(|5\rangle_3) = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + j\,|1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big).$$

Für einen Vergleich mit der Darstellung aus a) bietet es sich allerdings an, alle ω-Potenzen in ω_8-Potenzen auszudrücken. Wegen

$$\omega_2 = e^{j\cdot\frac{2\pi}{2}} = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^4 = \omega_8{}^4 \quad \text{und} \quad \omega_4 = e^{j\cdot\frac{2\pi}{4}} = \left(e^{j\cdot\frac{2\pi}{8}}\right)^2 = \omega_8{}^2$$

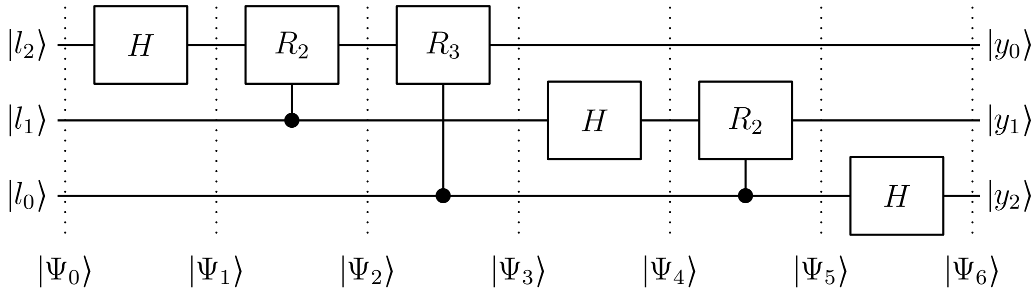
ist (mit $\omega_8{}^8 = 1$)

$$\omega_2{}^5 = \omega_8{}^{20} = \omega_8{}^4 \qquad \text{und} \qquad \omega_4{}^5 = \omega_8{}^{10} = \omega_8{}^2,$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{QFT}_8(|5\rangle_3) &= \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|0\rangle + \omega_8{}^4\,|1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + \omega_8{}^2\,|1\rangle\,\big)\otimes\big(\,|0\rangle + \omega_8{}^5\,|1\rangle\,\big)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\cdot\big(\,|000\rangle + \omega_8{}^5\,|001\rangle + \omega_8{}^2\,|010\rangle + \omega_8{}^7\,|011\rangle\\
&\qquad + \omega_8{}^4\,|100\rangle + \omega_8{}^9\,|101\rangle + \omega_8{}^6\,|110\rangle + \omega_8{}^{11}\,|111\rangle\,\big)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\,|0\rangle_3 + \omega_8{}^5\,|1\rangle_3 + \omega_8{}^2\,|2\rangle_3 + \omega_8{}^7\,|3\rangle_3\\
&\qquad + \omega_8{}^4\,|4\rangle_3 + \omega_8{}^1\,|5\rangle_3 + \omega_8{}^6\,|6\rangle_3 + \omega_8{}^3\,|7\rangle_3\,\big).
\end{aligned}$$

c) Betrachtet wird der Schaltkreis mit den angegebenen Zwischenzuständen:



Für $|2\rangle_3$ ist $|\Psi_0\rangle = |010\rangle$.

Dann ist $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |10\rangle$.

Da das mittlere Qubit gleich $|1\rangle$ ist, schaltet das R_2-Gatter, so dass für den Fall, dass das oberste (erste) Qubit gleich $|1\rangle$ ist, mit einem Faktor $\omega_{2^2} = \omega_4 = \mathrm{j}$ multipliziert wird. Also ist $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes |10\rangle$.

Da das untere Qubit gleich $|0\rangle$ ist, schaltet das R_3-Gatter nicht; es ist $|\Psi_3\rangle = |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes |10\rangle$.

Durch das Hadamard-Gatter erhält man

$$|\Psi_4\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes |0\rangle\,.$$

Da das untere Qubit gleich $|0\rangle$ ist, schaltet das R_2-Gatter nicht; es ist $|\Psi_5\rangle = |\Psi_4\rangle$.

Das letzte Hadamard-Gatter führt zu

$$\begin{aligned}
|\Psi_6\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{8}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big).
\end{aligned}$$

Dies ist gleich dem Tensorprodukt bei der Darstellung in b), allerdings mit der umgedrehten Reihenfolge der Faktoren. Dies spiegelt genau wieder, dass beim Schaltkreis die Qubits in umgekehrter Reihenfolge stehen.

Für $|5\rangle_3$ ist $|\Psi_0\rangle = |101\rangle$.

Dann ist $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes |01\rangle$.

Da das mittlere Qubit gleich $|0\rangle$ ist, schaltet das R_2-Gatter nicht; es ist $|\Psi_2\rangle = |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes |01\rangle$.

Da das untere Qubit gleich $|1\rangle$ ist, schaltet das R_3-Gatter, so dass für den Fall, dass das oberste (erste) Qubit gleich $|1\rangle$ ist, mit einem Faktor $\omega_{2^3} = \omega_8$ multipliziert wird. Also ist $|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big) \otimes |01\rangle$.

Durch das Hadamard-Gatter erhält man

$$|\Psi_4\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |1\rangle\,.$$

Da das untere Qubit gleich $|1\rangle$ ist, schaltet das R_2-Gatter, so dass für den Fall, dass das mittlere Qubit gleich $|1\rangle$ ist, mit einem Faktor $\omega_{2^2} = \omega_4 = \mathrm{j}$ multipliziert wird. Also ist

$$|\Psi_5\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes |1\rangle\,.$$

Das letzte Hadamard-Gatter führt zu

$$\begin{aligned} |\Psi_6\rangle \;&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\ &=\; \tfrac{1}{\sqrt{8}}\big(\,|0\rangle - \omega_8\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle + \mathrm{j}\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big). \end{aligned}$$

Wieder erhält man das Tensorprodukt aus der Darstellung in b), allerdings mit der umgedrehten Reihenfolge der Faktoren.

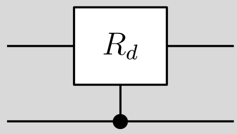
Das klassische Pendant ist der Input-Vektor

$$(0,\ 0,\ 1\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T \quad \text{bzw.} \quad (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)^T.$$

Die Fourier-transformierten Werte stehen also in der Transformationsmatrix D (die QFT realisiert die Rücktransformation) in der zweiten bzw. fünften Spalte, wenn man mit Null zu zählen beginnt; bei Zählung ab Eins ist das die dritte bzw. sechste Spalte.

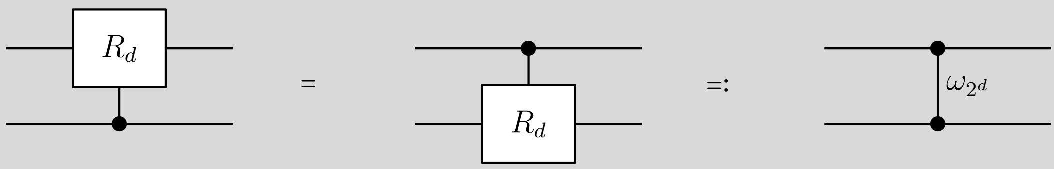
In der dritten Spalte von D (s. Aufgabe 2) sieht man die Vorfaktoren $1,\ \mathrm{j}, \ldots, -\mathrm{j}$ aus den Darstellungen oben zu $\mathrm{QFT}_8(|2\rangle_3)$ direkt; die Vorfaktoren zu $\mathrm{QFT}_8(|5\rangle_3)$ aus den Darstellungen oben kann man leicht entsprechend umrechnen, so dass man die sechste Spalte von D erkennt.

Aufgabe 4



a) Wie lautet die Transformationsmatrix für eine bedingte Phasenrotation R_d?

b) Überlegen Sie sich, dass es bei einer bedingten Phasenrotation egal ist, welches Qubit das Kontroll- und welches das Ziel-Qubit ist. Daher wird eine bedingte Phasenrotation auch wie im folgendn Bild rechts oder ähnlich dargestellt.



Lösung:

a) Es gilt

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle\,, \quad |01\rangle \mapsto |01\rangle\,, \quad |10\rangle \mapsto |10\rangle \qquad \text{und} \qquad |11\rangle \mapsto \omega_{2^d} \cdot |11\rangle\,.$$

Also ist die Transformationsmatrix

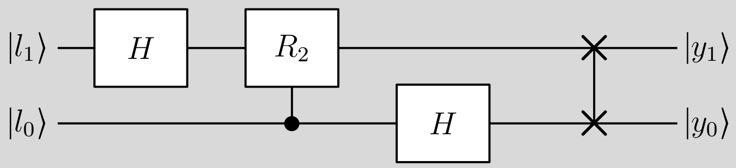
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{2^d} \end{pmatrix}.$$

b) Das Abbildungsverhalten aus a) erhält man, egal ob man das erste Qubit als Kontrol- und das zweite als Ziel-Qubit ansieht oder umgekehrt.

Aufgabe 5

Wie lautet die Transformationsmatrix des Schaltkreises für eine QFT_4?

Dabei wurde am Ende ein Swap-Gatter hinzugefügt, um die übliche Reihenfolge der Qubits wieder herzustellen.



Lösung:

Das erste Hadamard-Gatter (auf dem oberen Qubit) wird beschrieben durch

$$H \otimes I = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Aufgabe 4 ist die Transformationsmatrix zu R_2 wegen $\omega_{2^2} = \mathrm{j}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

Das zweite Hadamard-Gatter (auf dem unteren Qubit) wird beschrieben durch

$$I \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das Swap-Gatter wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der gesamte Schaltkreis wird also beschrieben durch (beachte die Reihenfolge!)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & j & 0 & -j \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies ist gleich der Rücktransformationsmatrix D der diskreten Fourier-Transformation zu $N = 4$.

Aufgabe 6 (mit Qiskit, 4 Punkte)

a) Implementieren Sie die QFT_8 in Qiskit.

b) Welchem Eingangszustand entspricht der in Aufgabe 1b) angegebene Zustand?

   Wie kann man diesen in Qiskit erzeugen?

c) Was ergibt sich durch die QFT_8 angewendet auf den Zustand aus b)?

   Vergleichen Sie dies mit Ihrer Berechnung von Aufgabe 1b).

d) Experimentieren Sie mit anderen Zuständen.