

9. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Der Zustand

$$|\Phi\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8 \cdot |1\rangle$$

wird

- in der $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ -Basis,
- in einer gegenüber der Standard-Basis um 22.5° gedrehten Basis $\{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle\}$

gemessen.

Zeichnen Sie die Situation und schätzen Sie qualitativ ab, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man bei a) $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ bzw. bei b) $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$ misst.

Berechnen Sie anschließend diese Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 2

Betrachtet wird einerseits das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ und andererseits das Bell-Paar $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

Ziel ist die Analyse, was jeweils passiert, wenn das Bell-Paar in einer um den Winkel α gedrehten Basis gemessen wird. Führen Sie dazu jeweils die folgenden Schritte durch.

- Führen Sie auf dem ersten Qubit eine Rotation um $-\alpha$, also mit der Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, durch.
- Beim aus a) resultierende Zustand wird nun das erste Qubit in der Standardbasis gemessen. Wie wahrscheinlich sind die Ergebnisse $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?
- In welchen Zustand kollabiert das Paar, wenn bei b) das Ergebnis $|0\rangle$ gemessen wird?
- Führen Sie auf dem Zustand von c) auf dem zweiten Qubit eine Rotation um $-\alpha$ durch.
- Beim aus d) resultierende Zustand wird nun das zweite Qubit in der Standardbasis gemessen. Wie wahrscheinlich sind die Ergebnisse $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?

Aufgabe 3 (mit Qiskit, 4 Punkte)

Modellieren Sie das Vorgehen von Aufgabe 2 in Qiskit und verifizieren Sie Ihre Ergebnisse für verschiedene Werte von α und die beiden Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$.

Aufgabe 4

Alice und Bob führen einen Quantenschlüsselaustausch nach dem BB84-Protokoll aus. Sie vereinbaren

$$\text{—} = 0, \quad | = 1, \quad / = 0, \quad \backslash = 1.$$

Alice wählt als Bitfolge

0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1

und als Basen

+ × + × × × + + × + + × .

Bob wählt als Basen

+ + × × × + + + × + × + .

a) Wie sehen die übertragenen Qubits aus?

Was erhält Bob? Wählen Sie zufällig einen Fall (würfeln Sie!), wenn das Messergebnis nicht eindeutig ist.

Welche Bits werden nach dem Basenabgleich verworfen, welche Bitfolgen bleiben bei Alice und Bob übrig?

b) Während der Übertragung misst Eve die Qubits in den Basen

+ × × + × × + × × × + +

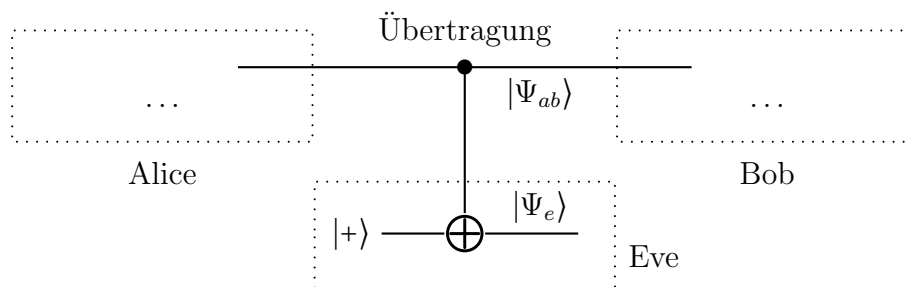
und sendet die gemessenen Qubits weiter.

Was misst Eve und was erhält Bob? Wählen Sie zufällig einen Fall (würfeln Sie!), wenn das Messergebnis nicht eindeutig ist.

Wie groß ist die Fehlerrate unter den von Bob und Alice nach dem Basen-Abgleich nicht verworfenen Bits?

Aufgabe 5

Analysieren Sie die Situation eines Horchers beim BB84-Protokoll, der wie in der Abbildung gezeigt ein eigenes Qubit mit $|+\rangle$ initialisiert und dann mit einem CNOT-Gatter mit dem übertragenen Qubit verknüpft.



Aufgabe 6 (doppelte Punktzahl)

Ziel der Aufgabe ist die Ermittlung der Fehlerwahrscheinlichkeit, die Alice und Bob bei einem Quantenschlüsselaustausch bei denjenigen Bits feststellen, bei denen sie die gleiche Basis genutzt haben, wenn sich Eve dazwischenschaltet und die übertragenen Qubits in einer $\{|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle\}$ -Basis misst, die gegenüber der Standard-Basis um den Winkel α gedreht ist, und die gemessenen Werte weiter sendet. Dabei sei $\alpha \in [0^\circ, 45^\circ]$.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst Eve $|\Phi_0\rangle$ bzw. $|\Phi_1\rangle$, wenn Alice $|0\rangle$ sendet?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Bob $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, wenn Eve $|\Phi_0\rangle$ an ihn sendet und Bob in der Standard-Basis misst.
- c) Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass Bob $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ misst, wenn Eve $|\Phi_1\rangle$ an ihn sendet und Bob in der Standard-Basis misst.
- d) Berechnen Sie mit den Ergebnissen von a) bis c) die Wahrscheinlichkeit, dass Bob und Alice in der beschriebenen Situation einen Bitfehler feststellen, wenn Alice $|0\rangle$ sendet.
- e) Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen, um die Wahrscheinlichkeit zu angeben, dass Bob und Alice in der beschriebenen Situation einen Bitfehler feststellen, wenn Alice $|1\rangle$ sendet.
- f) Wie müssen die Wahrscheinlichkeits-Formeln angepasst werden, um die entsprechenden Bitfehler-Wahrscheinlichkeiten anzugeben, wenn Alice $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ sendet?
- g) Welche Bitfehler-Wahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn Alice zufällig zwischen $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$ und $|-\rangle$ auswählt?

Nutzen Sie Additionstheoreme/Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen, um den Ausdruck zu vereinfachen.

Zusatzaufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Eve das gleiche Bit erhält wie Alice (bei zufälliger Basis-Auswahl, der Standard-Zuordnung der Bits und der Zuordnung von $|\Phi_0\rangle$ zu 0 und $|\Phi_1\rangle$ zu 1)?

Aufgabe 7 (mit Qiskit, 4 Punkte)

Berechnen Sie mit Qiskit simulativ die Wahrscheinlichkeit, nach der in der Zusatzaufgabe von Aufgabe 6 gefragt ist, für verschiedene α -Werte.