

7. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für $N = 16$.

Berechnen Sie numerisch (mit einem Taschenrechner, einer Tabellenkalkulation oder einem kleinen Programm), welche Amplituden das gesuchte Element bzw. die anderen Elemente zu Beginn und dann nach ein bis sechs Schritten von Invertieren und Spiegeln haben.

Aufgabe 2

Betrachtet wird die Matrix $S \in \mathbb{R}^{N \times N}$ einer Spiegelung am Mittelwert, die gegeben ist durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{N} - 1 & \frac{2}{N} & \dots & \frac{2}{N} \\ \frac{2}{N} & \frac{2}{N} - 1 & \dots & \frac{2}{N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{N} & \dots & & \frac{2}{N} - 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Wie lautet die Matrix konkret für $N = 4$ und $N = 8$?
- b) Testen Sie exemplarisch
 - b1) zu $N = 4$ und $\vec{w}_1 = (0, 0, 4, 0)^T$ bzw. $\vec{w}_2 = (0, 1, 2, 5)^T$,
 - b2) zu $N = 8$ und $\vec{w}_0 = (1, 3, 1, 2, 4, 7, 6, 0)^T$,
 dass $S \cdot \vec{w}_i$ eine Spiegelung am Mittelwert bewirkt.
- c) Berechnen Sie zu $N = 4$ konkret, dass $S = H^{\otimes 2} \cdot (-D) \cdot H^{\otimes 2}$ mit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.
- d) Sei $N = 8$. Berechnen Sie $S \cdot \vec{v}$ zu $\vec{v} = (0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$,
 - 1) indem Sie die Darstellung aus a) nutzen,
 - 2) indem Sie die Darstellung

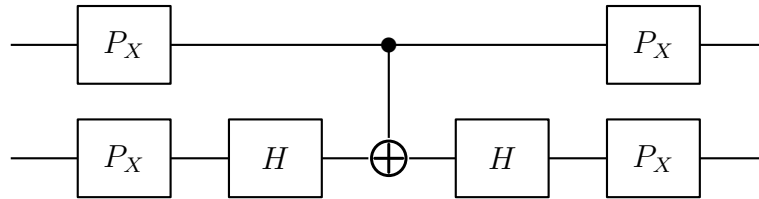
$$S = H^{\otimes 3} \cdot (-D) \cdot H^{\otimes 3} \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nutzen und $S \cdot \vec{v}$ durch dreimalige Matrix-Vektor-Multiplikation ermitteln.

- e) Überzeugen Sie sich konkret für $N = 4$ und $N = 8$, dass die Spalten von S die Länge 1 haben und paarweise orthogonal zueinander sind, die Matrix S also unitär ist.
- f) Rechnen Sie für allgemeines N nach, dass die Spalten von S die Länge 1 haben und paarweise orthogonal zueinander sind, die Matrix S also unitär ist.

Aufgabe 3

- a) Begründen Sie, dass der abgebildete Schaltkreis eine Multiplikation des Zustandsvektors mit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt.



- b) Entwerfen Sie einen Schaltkreis auf einem 3-Qubit-Register, der eine Multiplikation des Zustandsvektors mit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ bewirkt.

Tipp: Nutzen Sie das Toffoli-Gatter!

Aufgabe 4

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für $n = 4$, also $N = 16$, zur Suche eines Elements $x_0 \in \{0, 15\}$.

- Berechnen und visualisieren Sie in einem $|x_0\rangle_4^\perp - |x_0\rangle_4$ -Koordinatensystem den Zustand $|\Psi_0\rangle$ nach der Initialisierung sowie die Zustände $|\Psi_k\rangle$ nach k Grover-Iterationen, $k = 1, \dots, 6$.
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nach k Iterationen ($k = 1, \dots, 6$), bei einer Messung den gesuchten Zustand zu erhalten?
- Stellen Sie einen Zusammenhang Ihrer Ergebnisse mit denen von Aufgabe 1 her.

Aufgabe 5

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für $n = 10$, also $N = 1024$, zur Suche eines Elements $x_0 \in \{0, 1023\}$.

- Wie groß ist die gerundete prognostizierte optimale Iterationsanzahl k_{opt} ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man mit dieser Iterationsanzahl tatsächlich das gesuchte Element?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das gesuchte Element zu messen, wenn man eine Iteration mehr bzw. weniger macht also bei b)?
- Welche Amplituden hat der Zustand $|x_0\rangle$ bzw. haben die Zustände $|l\rangle$, $l \in \{0, \dots, 1023\}$, $l \neq x_0$, nach 8 Iterationen?

Aufgabe 6

Sei β_0 der Winkel des Zustands im $|x_0\rangle_n^\perp - |x_0\rangle_n$ -Koordinatensystem nach der Initialisierung und β der Drehwinkel bei einer Iteration beim Grover-Algorithmus.

Zeigen Sie, dass $\beta_0 = \frac{1}{2}\beta$ gilt. (Tipp: Additionstheorem!)

Aufgabe 7

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für $n = 3$, also $N = 8$, wobei

- das zweite und dritte Element (bei Zählung 1 bis 8)
- das zweite, dritte und fünfte Element (bei Zählung 1 bis 8)

gesuchte Treffer darstellen.

Berechnen Sie jeweils den Zustand $|\Psi_1\rangle$ nach einer Grover-Iteration. Nutzen Sie dazu die Betrachtung entsprechender (Dreh-)Winkel in einem zweidimensionalen Koordinatensystem.

Wie lautet jeweils eine vektorielle Darstellung von $|\Psi_1\rangle$?

Aufgabe 8

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für $N = 128$, wobei es $r = 5$ Treffer gibt.

- Was ist die gerundete prognostizierte optimale Iterationsanzahl k_{opt} ?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei dieser Iterationsanzahl tatsächlich einen Treffer?

Wie ist es mit einer Iteration mehr oder weniger?

Aufgabe 9

Betrachtet wird der Grover-Algorithmus für allgemeines N , wobei es r Treffer gibt.

- Mit welcher Formel kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man bei einer Iterationsanzahl k tatsächlich einen Treffer erhält?
- Berechnen Sie numerisch (mit einem Taschenrechner, einer Tabellenkalkulation oder einem kleinen Programm) für verschiedene Werte von N und r (z.B. $N = 1024$ und $r = 4$ oder $r = 7$), wie wahrscheinlich man bei einer Messung einen Treffer erhält, wenn man eine Iterationszahl gleichverteilt zwischen 1 und \sqrt{N} zieht.

Experimentieren Sie mit Ihrer Funktion!

Aufgabe 10 (mit Qiskit, 5 Punkte)

Implementieren Sie in Qiskit den Grover-Algorithmus zu einem Quanten-Orakel, das eine aussagenlogische Funktion f realisiert, die Sie als (wilde) Kombination von NOT-, CNOT- und/oder Toffoli-Gattern designen.

Hinweis: Beachten Sie, dass das Quanten-Orakel bei Basiszuständen nur Änderungen an dem Hilfsqubit durchführen darf/soll, d.h., alle anderen Qubit-Modifikationen müssen „rückabgewickelt“ werden.

Untersuchen Sie, ob/wie oft der Algorithmus Ihnen tatsächlich eine Belegung liefert, bei der f wahr ist.