

## 6. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es keine unitäre Realisierung von OR auf einem 2-Qubit-Register gibt.

### Aufgabe 2

Wie lautet die Transformationsmatrix für die Toffoli-Transformation?

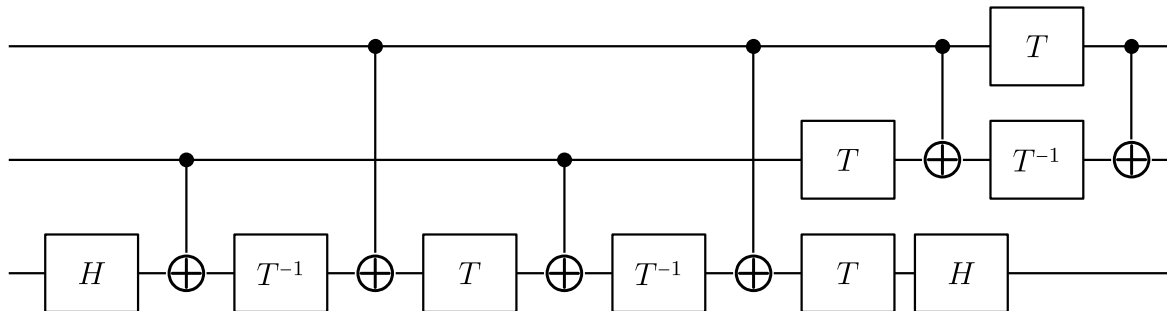
### Aufgabe 3

Wie sehen die Ausgabe-Qubits einer Toffoli-Transformation aus, wenn alle drei Eingabe-Qubits gleich  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  sind?

Können Sie Ihre Beobachtung/Rechnung verallgemeinern?

### Aufgabe 4

Verifizieren Sie, dass man mit dem 1-Qubit-Gatter  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi}{4}j} \end{pmatrix}$  und entsprechend  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi}{4}j} \end{pmatrix}$  das Toffoli-Gatter wie folgt nachbauen kann:



Tipp:

Es reicht, sich zu überlegen, dass bei den 8 Basiszuständen das Ergebnis des Schaltkreises dem des Toffoli-Gatters entspricht.

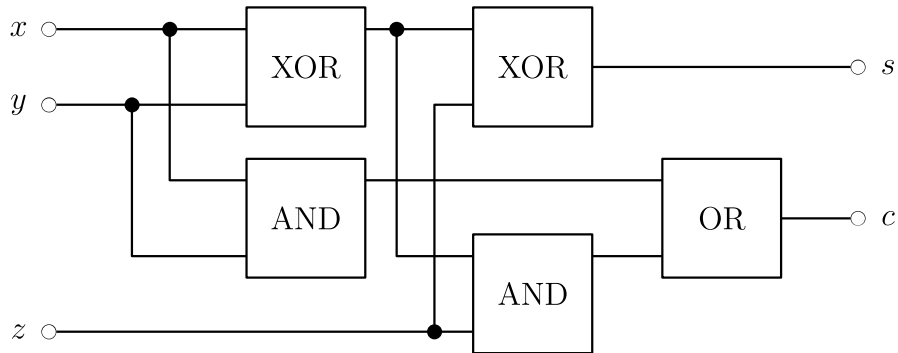
Betrachten Sie zunächst den Fall, dass das erste Qubit gleich  $|0\rangle$  ist.

Betrachten Sie dann den Fall, dass das zweite Qubit gleich  $|0\rangle$  ist. Was muss man sich dazu überlegen?

Es bleibt der Fall, dass die ersten beiden Qubits gleich  $|1\rangle$  sind.

### Aufgabe 5

Betrachtet wird ein klassischer Volladdierer, d.h., der Output stellt in der Form  $cs$  die zweistellig binär dargestellte Summe von  $x, y$  und  $z$ ,  $x, y, z \in \{0, 1\}$ , dar:



Entwerfen Sie einen entsprechenden Quanten-Computing-Schaltkreis.

Versuchen Sie, Ihren Schaltkreis zu optimieren.

### Aufgabe 6 (mit Qiskit, 5 Punkte)

Erstellen Sie in Qiskit einen Schaltkreis, der auf  $|0\rangle/|1\rangle$ -Eingaben wie ein Volladdierer funktioniert.

Welche Ausgaben erhält man bei anderen Eingaben, z.B.  $|+\rangle$ ?

### Aufgabe 7

Betrachtet wird das sogenannte *Fredkin*- oder kontrolliertes Swap-Gatter  $F$  auf einem 3-Qubit-Register. Für Basiszustände  $|xyz\rangle$  mit  $x, y, z \in \{0, 1\}$  wirkt es wie folgt:

$$F(x, y, 0) = (x, y, 0) \quad \text{und} \quad F(x, y, 1) = (y, x, 1).$$

Wie kann man mit dem Fredkin-Gatter eine AND-Verknüpfung realisieren?

### Aufgabe 8

Betrachtet wird ein Zufallsexperiment mit den Ausgabewerten „A“ und „B“, wobei bekannt ist, dass

1. entweder immer „A“ geliefert wird, oder
2. mit Wahrscheinlichkeit  $p > 0$  „B“ und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  „A“ geliefert wird.

Das Zufallsexperiment wird  $k$  mal wiederholt. Erhält man dabei mindestens ein Mal „B“, so gilt 2.; erhält man immer „A“, entscheidet man, dass 1. gilt.

Wie oft müssen Sie das Zufallsexperiment durchführen, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung kleiner als  $10^{-n}$  ist?

Wie groß ist  $k$  konkret bei  $n = 100$  und

- a)  $p = 0.6$ ,
- b)  $p = 0.2$ ?