

## 5. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie für jede mögliche Funktion

$$f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

die Transformationsmatrix zu der Transformation  $U_f$  entsprechend des Deutsch-Algorithmus auf einem 2-Qubit-Register, die durch

$$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle \quad \text{für } x, y \in \{0, 1\}$$

festgelegt ist.

### Aufgabe 2

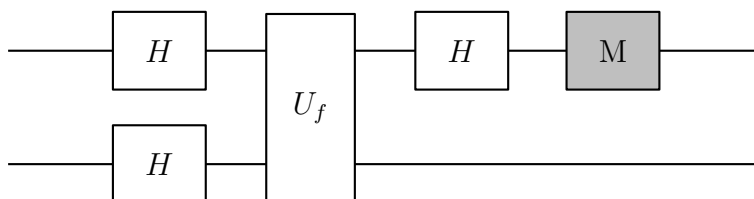
Betrachtet wird die Transformation  $U_f$  entsprechend des Deutsch-Algorithmus auf einem 2-Qubit-Register wie oben zu einer beliebigen Funktion  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ .

Berechnen Sie die Wirkung von  $U_f$  auf  $|\Psi\rangle \otimes |+\rangle$  mit einem beliebigen Zustand  $|\Psi\rangle$ .

Tip: Berechnen Sie zunächst die Wirkung von  $U_f$  auf  $|x\rangle \otimes |+\rangle$  mit  $x \in \{0, 1\}$ .

### Aufgabe 3

Betrachtet wird der Schaltkreis des Deutsch-Algorithmus:



Beim Deutsch-Algorithmus wendet man den Schaltkreis auf  $|0\rangle \otimes |1\rangle$  an und kann dann durch die Messung entscheiden, ob  $f(0) = f(1)$  oder  $f(0) \neq f(1)$  ist.

Was passiert, wenn man

- a)  $|1\rangle \otimes |1\rangle$ ,      b)  $|0\rangle \otimes |0\rangle$ ,      c)  $|1\rangle \otimes |0\rangle$

am Eingang hat? Kann man dann auch durch die Messung entscheiden, ob  $f(0) = f(1)$  oder  $f(0) \neq f(1)$  ist?

#### Aufgabe 4

Bestimmen Sie

- a) für die konstante Funktion

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x) = 1 \text{ für alle } x \in \{0, 1\}^2,$$

- b) für die balancierte Funktion

$$f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2,$$

die Transformationsmatrix zu der Transformation  $U_f$  entsprechend des Deutsch-Jozsa-Algorithmus auf einem 3-Qubit-Register, die durch

$$U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle \quad \text{für } x \in \{0, 1\}^2 \text{ und } y \in \{0, 1\}$$

festgelegt ist.

#### Aufgabe 5

Betrachtet wird der Deutsch-Jozsa-Algorithmus mit der Funktion  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  mit

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 1 \\ f(4) = 0, \quad f(5) = 1, \quad f(6) = 1, \quad f(7) = 1. \end{aligned}$$

- a) Wie lautet der Zustand  $\widetilde{\Psi}_2$ ?  
b) Welche Messergebnisse kommen mit welchen Wahrscheinlichkeiten vor?

Tipp: Sie können  $\widetilde{\Psi}_3$  durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation der Transformationsmatrix zu  $H^{\otimes 3}$  mit  $\widetilde{\Psi}_2$  berechnen.

#### Aufgabe 6

Betrachtet wird der Algorithmus von Bernstein-Vazirani mit der Funktion  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ , die durch  $a = 5 = 101_2$  festgelegt wird.

- a) Wie lauten die Funktionswerte  $f(x)$ ,  $x = 0, \dots, 7$ ?  
b) Wie lautet der Zustand  $\widetilde{\Psi}_2$ ?  
c) Berechnen Sie  $\widetilde{\Psi}_3$ .

Tipp: Nutzen Sie wieder eine Matrix-Vektor-Multiplikation der Transformationsmatrix zu  $H^{\otimes 3}$  mit  $\widetilde{\Psi}_2$ .

## Aufgabe 7

- a) Zeigen Sie, dass sich jede balancierte Funktion  $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ , die  $f((0, 0)) = 0$  erfüllt, darstellen lässt als

$$f(x_1, x_2) = a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2, \quad (x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$$

mit geeignetem  $(a_1, a_2) \in \{0, 1\}^2$ .

Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen den behaupteten Ausgaben bei den Algorithmen von Deutsch-Jozsa und Bernstein-Vazirani.

- b) Geben Sie eine balancierte Funktion  $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$  an, die  $f((0, 0, 0)) = 0$  erfüllt und sich nicht darstellen lässt als

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1\}^3$$

mit  $(a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3$ .

- c) Überlegen Sie, dass jede Funktion  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , die mit einem  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ ,  $a \neq 0$ , definiert ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n,$$

balanciert ist.

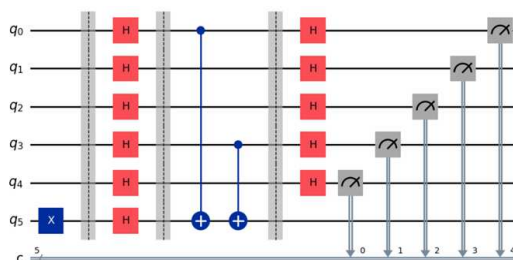
Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen den behaupteten Ausgaben bei den Algorithmen von Deutsch-Jozsa und Bernstein-Vazirani.

Wie sieht der Zusammenhang aus für den Fall  $a = 0$ ?

## Aufgabe 8

Das nebenstehende Bild zeigt einen Schaltkreis, der den Bernstein-Vazirani-Algorithmus für  $a = 10010_2$  realisiert. Wie kann man ohne große Rechnung sehen, dass der Schaltkreis als Messergebnis sicher  $|a\rangle_5 = |10010\rangle$  liefert?

Tipp: Nutzen Sie Blatt 3, Aufgabe 10.



## Aufgabe 9 (mit Qiskit, 5 Punkte)

Experimentieren Sie, was bei einem Schaltkreis wie beim Algorithmus von Deutsch-Jozsa / Bernstein-Vazirani bei anderen Funktionen  $f$  passiert.

Überlegen Sie sich dazu beispielsweise eine weder konstante noch balancierte Funktion  $f$ , designen dazu das „Orakel“  $U_f$  und analysieren das Ergebnis.