FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2025
02.04.2025

2. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Sei

$$|\Psi_1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \quad \text{und} \quad |\Psi_2\rangle = \tfrac{1}{2}|0\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\,.$$

Berechnen Sie $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ als Überlagerung der Basiszustände und rechnen Sie konkret nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 3

Betrachtet werden die Zustände

$$\begin{aligned}|\Psi_1\rangle &= 0.7\,|00\rangle + 0.1\,|01\rangle + 0.5\,|10\rangle + 0.5\,|11\rangle\,,\\ |\Psi_2\rangle &= 0.8\,|00\rangle + 0.4\,|01\rangle + 0.4\,|10\rangle + 0.2\,|11\rangle\,.\end{aligned}$$

a) Rechnen Sie jeweils nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.

b) Berechnen Sie die Concurrence der beiden Zustände.

c) Welcher der beiden Zustände ist separabel? Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an.

Aufgabe 4

Für den Zustand $|\Psi\rangle$ eines 2-Qubit-Quantenregisters gelte

$$|\Psi\rangle \;=\; \begin{pmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie die Normierungsbedingung von $|\Psi\rangle$, um zu zeigen, dass es ein μ gibt, so dass die Vektoren $\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$ die Länge 1 haben, man also

$$|\Psi\rangle \;=\; \Big(\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\Big) \otimes \Big(\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}\Big),$$

als Tensorprodukt zweier Qubits darstellen kann.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Concurrence immer kleiner oder gleich 1 ist, also dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ gilt:

$$2 \cdot |ad - bc| \;\leq\; 1.$$

Tipp: Ersetzen Sie die 1 rechts durch die Normierungsbedingung, quadrieren Sie ggf. beide Seiten, bringen Sie alles auf eine Seite und suchen Sie mittels geeigneter binomischer Formeln nach quadratischen Ausdrücken.

Aufgabe 6

Betrachtet wird der (maximal verschränkte) Bell-Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.

a) Auf das erste Qubit wird ein $\mathrm{RY}_{2\alpha}$-Gatter angewendet, also eine Drehung um den Winkel α. Zeigen Sie, dass der resultierende Zustand auch maximal verschränkt ist.

b) Welchen Zustand erhält man, wenn man auf beide Qubits ein $\mathrm{RY}_{2\alpha}$-Gatter anwendet?

Aufgabe 7

Betrachtet wird

$$|\Psi_0\rangle \;=\; \tfrac{2}{3}\,|00\rangle + \tfrac{1}{3}\,|01\rangle - \tfrac{2}{3}\,|11\rangle\,.$$

Nun wird auf das erste Qubit die Transformation U_1 und auf das zweite Qubit die Transformation U_2 mit

$$U_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad U_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

angewendet.

a) Welchen Zustand $|\Psi_1\rangle$ hat man nach Anwendung der Transformationen?

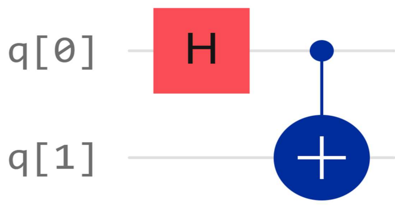
b) Berechnen Sie die Concurrence von $|\Psi_0\rangle$ und von $|\Psi_1\rangle$.

Aufgabe 8 (mit Qiskit, 5 Punkte)

In Qiskit kann durch den nebenstehenden Schaltkreis der maximal verschränkte Bell-Zustand

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$$

erzeugt werden.



Was passiert, wenn Sie nach der Schaltung auf die einzelnen Qubits unitäre Transformationen (z.B. Hadamard- oder Dreh-Gatter) anwenden?

Wie ändert sich die Concurrence?

Wie ist's, wenn man vor der Schaltung unitäre Transformationen hinzufügt?