FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
17.04.2024

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Quanten-Computing

Aufgabe 1

Betrachtet werden die Zustände

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= 0.7\,|00\rangle + 0.1\,|01\rangle + 0.5\,|10\rangle + 0.5\,|11\rangle\,, \\ |\Psi_2\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{15}}\,|00\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,|01\rangle + \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,|10\rangle + \sqrt{\tfrac{4}{15}}\,|11\rangle\,. \end{aligned}$$

Das zweite Qubit wird jeweils gemessen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, und welche Zustände erhält man dann?

Was fällt bei $|\Psi_2\rangle$ auf? Haben Sie eine Erklärung?

Lösung:

Bei $|\Psi_1\rangle$:

- Man erhält $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $0.7^2 + 0.5^2 = 0.74$; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{0.74}}\Big(0.7\,|00\rangle + 0.5\,|10\rangle\Big) \;\approx\; \big(0.81\,|0\rangle + 0.58\,|1\rangle\big) \otimes |0\rangle\,.$$

- Man erhält $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $0.1^2 + 0.5^2 = 0.26$; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{0.26}}\Big(0.1\,|01\rangle + 0.5\,|11\rangle\Big) \;\approx\; \big(0.20\,|0\rangle + 0.98\,|1\rangle\big) \otimes |1\rangle\,.$$

Bei $|\Psi_2\rangle$:

- Man erhält $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{2/3}}\left(\sqrt{\tfrac{2}{15}}\,|00\rangle + \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,|10\rangle\right) \;=\; \left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|0\rangle + \sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|1\rangle\right) \otimes |0\rangle\,.$$

- Man erhält $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15}+\frac{4}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$; der resultierende Zustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{1/3}}\Big(\sqrt{\tfrac{1}{15}}\,|01\rangle+\sqrt{\tfrac{4}{15}}\,|11\rangle\Big) \;=\; \Big(\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|0\rangle+\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|1\rangle\Big)\otimes|1\rangle\,.$$

Die resultierenden Zustände sind im ersten Qubit gleich. Das liegt daran, dass $|\Psi_2\rangle$ separabel ist:

$$|\Psi_2\rangle \;=\; \Big(\sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|0\rangle+\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|1\rangle\Big)\otimes\Big(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\rangle+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\rangle\Big).$$

Beim Messen erhält man entsprechend des zweiten Qubits $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$; beim Messen bleibt das erste Qubit unverändert erhalten.

Aufgabe 2

Sei $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&0\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&-1&0&-1\\0&2&3&0\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A\otimes B$ und $B\otimes A$.

b) Sei $a=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(A\cdot a)\otimes(B\cdot b)$ und $(A\otimes B)\cdot(a\otimes b)$.

Lösung:

a)

$$A\otimes B \;=\; \begin{pmatrix} 1\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&-1&0&-1\\0&2&3&0\end{pmatrix} & 2\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&-1&0&-1\\0&2&3&0\end{pmatrix}\\ -3\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&-1&0&-1\\0&2&3&0\end{pmatrix} & 0\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&-1&0&-1\\0&2&3&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1&2&2&0&2&4\\-2&-1&0&-1&-4&-2&0&-2\\0&2&3&0&0&4&6&0\\-3&0&-3&-6&0&0&0&0\\6&3&0&3&0&0&0&0\\0&-6&-9&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B \otimes A \;=\; \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$(A \cdot a) \otimes (B \cdot b)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -12 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes B) \cdot (a \otimes b) \;=\; (A \otimes B) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -12 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(A \cdot B) \otimes (S \cdot T)$ und $(A \otimes S) \cdot (B \otimes T)$.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{C}^{3\times 5}$, $S \in \mathbb{C}^{4\times 6}$ und $T \in \mathbb{C}^{6\times 7}$.

Welche Dimensionen ergeben sich bei der Berechnung von

$$(A \cdot B) \otimes (S \cdot T) \qquad \text{bzw.} \qquad (A \otimes S) \cdot (B \otimes T)?$$

Kontrollieren Sie auch, dass man die Produkte alle bilden kann.

Lösung:

a)

$$(A \cdot B) \otimes (S \cdot T) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A \otimes S) \cdot (B \otimes T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 16 & 12 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen der gemeinsamen Dimension 3 kann man $A \cdot B$ bilden und erhält eine Matrix aus $\mathbb{C}^{2\times 5}$.

Wegen der gemeinsamen Dimension 6 kann man $S \cdot T$ bilden und erhält eine Matrix aus $\mathbb{C}^{4\times 7}$.

Das Tensorprodukt $(A \cdot B) \otimes (S \cdot T)$ hat dann die Dimension $(2 \cdot 4) \times (5 \cdot 7) = 8 \times 35$.

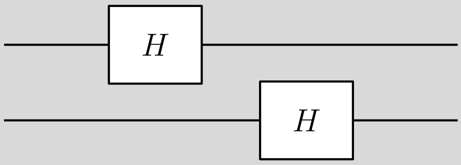
Das Tensorprodukt $A \otimes S$ hat die Dimension $(2 \cdot 4) \times (3 \cdot 6) = 8 \times 18$.

Das Tensorprodukt $B \otimes T$ hat die Dimension $(3 \cdot 6) \times (5 \cdot 7) = 18 \times 35$.

Wegen der gemeinsamen Dimension 18 kann man $(A \otimes S) \cdot (B \otimes T)$ bilden und erhält eine Matrix aus $\mathbb{C}^{8\times 35}$.

Aufgabe 4

Statt der (gleichzeitigen) Ausführung der Hadamard-Transformation auf die beiden Qubits eines 2-Qubit-Registers sollen die Transformationen nacheinander durchgeführt werden: Zunächst für das erste, dann für das zweite Qubit.



a) Wie lauten die einzelnen (4×4)-Transformationsmatrizen, also für die Hadamard-Transformation nur für das erste bzw. nur für das zweite Qubit?

b) Wie berechnet sich dadurch die Gesamt-Transformationsmatrix?

Lösung:

a) Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das erste Qubit ist

$$U \;=\; H \otimes I \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das zweite Qubit ist

$$V \;=\; I \otimes H \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Gesamt-Transformationsmatrix berecnet sich durch (beachte die Reihenfolge!)

$$V \cdot U \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

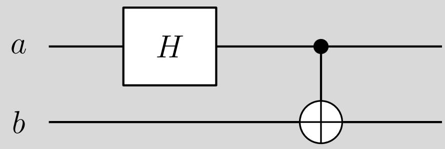
was $H \otimes H$ entspricht.

Dies erhält man auch durch die Rechnung

$$(I \otimes H) \cdot (H \otimes I) \;=\; (I \cdot H) \otimes (H \cdot I) \;=\; H \otimes H.$$

Aufgabe 5

Das Blockschaltbild rechts erzeugt beim Eingangszustand $a \otimes b = |0\rangle \otimes |0\rangle$ den Bell-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.



Welche Zustände ergeben sich bei

$$a \otimes b = |0\rangle \otimes |1\rangle\,, \qquad a \otimes b = |1\rangle \otimes |0\rangle \quad \text{bzw.} \quad a \otimes b = |1\rangle \otimes |1\rangle?$$

Überlegen Sie sich das Ergebnis

a) durch „Verfolgung“ der einzelnen Qubits bzw. des gesamten Zustands,

b) durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der entsprechenden Transformationsmatrix T.

Berechnen Sie jeweils die Concurrence der Ergebnis-Zustände.

Zur Information: Auch diese resultierenden Zustände nennt man *Bell-Zustände*.

Lösung:

a) Sei $|\Psi\rangle$ der Zustand nach Anwendung des Hadamard-Gatters auf das erste Qubit.

- Bei $a \otimes b = |0\rangle \otimes |1\rangle$ ist $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |11\rangle\big)$.

  Das Ergebnis ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big)$.
- Bei $a \otimes b = |1\rangle \otimes |0\rangle$ ist $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |10\rangle\big)$.

  Das Ergebnis ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big)$.
- Bei $a \otimes b = |1\rangle \otimes |1\rangle$ ist $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |11\rangle\big)$.

  Das Ergebnis ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$.

b) Die Transformationsmatrizen für die Hadamard-Transformation nur für das erste Qubit ist

$$U \;=\; H \otimes I \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

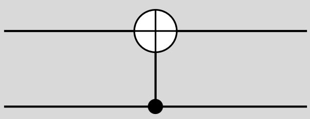
$$
\begin{aligned}
T &= \mathrm{CNOT} \cdot U \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Da $|01\rangle$, $|10\rangle$ bzw. $|11\rangle$ dem zweiten, dritten bzw. vierten Einheitsvektor entspricht, erhält man das Ergebnis durch Multiplikation von T mit dem entsprechenden Einheitsvektor; dies ergibt die entsprechende Spalte von T.

Für jeden Ergebniszustände erhält man die Concurrence 1, d.h., die Zustände sind maximal verschränkt.

Aufgabe 6

Wie lautet die Transformationsmatrix $\mathrm{CNOT}_{2\to1}$ zu einer CNOT-Transformation, bei der das zweite Qubit das Kontroll-Qubit und das erste das Ziel-Qubit ist?



Lösung:

Die Basiszustände werden folgendermaßen abgebildet:

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle \mapsto |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle \mapsto |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

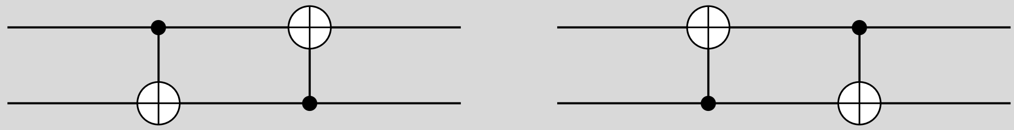
$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle \mapsto |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |11\rangle \mapsto |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

$\mathrm{CNOT}_{2\to1}$ ergibt sich aus den entsprechenden Spalten:

$$
\mathrm{CNOT}_{2\to1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Aufgabe 7

Wie lauten die Transformationsmatrizen zu den folgenden Blockschaltbildern?



Leiten Sie sich das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen her:

a) Indem Sie die Auswirkung auf die einzelnen Basiszustände verfolgen.

b) Durch eine geeignete Matrix-Matrix-Multiplikation.

Bewirken die beiden Schaltungen das Gleiche?

Lösung:

a) Für den linken Schaltkreis gilt

- $|00\rangle \mapsto |00\rangle \mapsto |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $|01\rangle \mapsto |01\rangle \mapsto |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $|10\rangle \mapsto |11\rangle \mapsto |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $|11\rangle \mapsto |10\rangle \mapsto |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix ist also $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für den rechten Schaltkreis gilt

- $|00\rangle \mapsto |00\rangle \mapsto |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $|01\rangle \mapsto |11\rangle \mapsto |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $|10\rangle \mapsto |10\rangle \mapsto |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $|11\rangle \mapsto |01\rangle \mapsto |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix ist also $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Offensichtlich sind dies unterschiedliche Transformationen.

b) Die Transformationsmatrix für den linken Schaltkreis ist

$$\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \cdot \mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix für den rechten Schaltkreis ist

$$\mathrm{CNOT} \cdot \mathrm{CNOT}_{2\to 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn man die Transformationsmatrix $T = \mathrm{CNOT}_{2\to 1} \cdot \mathrm{CNOT}$ der linken Schaltung berechnet hat, kann man auch durch die folgenden beiden alternativen Möglichkeiten darauf schließen, dass die Transformationsmatrix der rechten Schaltung gleich T^T ist:

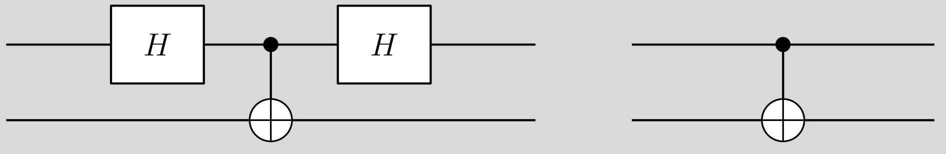
1. Da CNOT und $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ symmetrisch sind, ist

$$\mathrm{CNOT} \cdot \mathrm{CNOT}_{2\to 1} = ({\mathrm{CNOT}_{2\to 1}}^T \cdot \mathrm{CNOT}^T)^T = (\mathrm{CNOT}_{2\to 1} \cdot \mathrm{CNOT})^T = T^T.$$

2. Bei der Hintereinander-Ausführung der linken und der rechten Schaltung hebt sich alles auf. Also muss die rechte Schaltung die Inverse der linken sein. Da T unitär und reell ist, ist die Inverse gleich der Transponierten.

Aufgabe 8

Betrachtet werden die beiden dargestellten Schaltkreise:



Überlegen Sie sich, dass zwar die zweifache Anwendung des Hadamard-Gatters den Ursprungszustand liefert, dass aber die beiden Schaltkreise unterschiedlich sind.

Lösung:

Beispielsweise wird $|00\rangle$ im linken Schaltkreis durch das Hadamard-Gatter und CNOT aus den Bell-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$ abgebildet. Das zweite Hadamard-Gatter führt dann zu

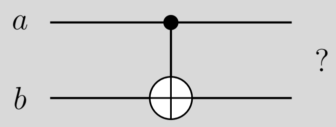
$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes |0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes |1\rangle\Big) \;=\; \tfrac{1}{2}\big(\,|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\,\big),$$

während $|00\rangle$ im rechten Schaltkreis unverändert bleibt.

Aufgabe 9

Welche Zustände ergeben sich durch ein CNOT-Gatter angewendet auf $a \otimes b$ mit $a, b \in \{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$ und a als Kontroll-Qubit und b als Ziel-Qubit. Berechnen Sie die entsprechenden Tabelleneinträge.

	$a = \|0\rangle$	$a = \|1\rangle$	$a = \|+\rangle$	$a = \|-\rangle$
$b = \|0\rangle$				
$b = \|1\rangle$				
$b = \|+\rangle$				
$b = \|-\rangle$				



Welche der resultierenden Zustände sind separabel? Stellen Sie in dem Fall das Ergebnis als entsprechendes Tensorprodukt an.

Lösung:

- Für $a = |0\rangle$ bleibt b unverändert; man erhält also $|0\rangle \otimes b$.
- Für $a = |1\rangle$ flippen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bei b:

$$|0\rangle \mapsto |1\rangle\,, \qquad |1\rangle \mapsto |0\rangle\,,$$

$$|+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|1\rangle + |0\rangle\,\big) = |+\rangle\,,$$

$$|-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|1\rangle - |0\rangle\,\big) = -\,|-\rangle\,.$$

  Dabei bleibt der Zustand unverschränkt.

- Für $a = |+\rangle$ oder $a = |-\rangle$ und $b = |0\rangle$ oder $b = |1\rangle$ erhält man die maximal verschränkten Bell-Zustände:

$$|+\rangle \otimes |0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |10\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big).$$

$$|+\rangle \otimes |1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle + |11\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle + |10\rangle\,\big).$$
$$|-\rangle \otimes |0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle - |10\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle - |11\rangle\,\big).$$
$$|-\rangle \otimes |1\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle - |11\rangle\,\big) \;\mapsto\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle - |10\rangle\,\big).$$

- Ist $b = |+\rangle$, so ändert sich b weder bei $a = |0\rangle$ noch bei $a = |1\rangle$, also auch nicht bei irgendeiner Überlagerung, insbesondere auch nicht bei $a = |+\rangle$ oder $a = |-\rangle$.
- Für $a = |+\rangle$ und $b = |-\rangle$ erhält man

$$\begin{aligned}
|+\rangle \otimes |-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\,|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\,\big) \\
&\mapsto \tfrac{1}{2}\big(\,|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\,|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \;=\; |-\rangle \otimes |-\rangle\,.
\end{aligned}$$

- Ähnlich kann man nachrechnen, dass $|-\rangle \otimes |-\rangle$ auf $|+\rangle \otimes |-\rangle$ abgebildet wird. Das ergibt sich aus der dem vorherigen Punkt und der Tatsache, dass U zu sich selbst invers ist.

Insgesamt erhält man die folgende Tabelle:

	$a = \|0\rangle$	$a = \|1\rangle$	$a = \|+\rangle$	$a = \|-\rangle$
$b = \|0\rangle$	$\|00\rangle$	$\|11\rangle$	$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\|00\rangle + \|11\rangle\,\big)$	$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\|00\rangle - \|11\rangle\,\big)$
$b = \|1\rangle$	$\|01\rangle$	$\|10\rangle$	$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\|01\rangle + \|10\rangle\,\big)$	$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\|01\rangle - \|10\rangle\,\big)$
$b = \|+\rangle$	$\|0\rangle \otimes \|+\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|+\rangle$	$\|+\rangle \otimes \|+\rangle$	$\|-\rangle \otimes \|+\rangle$
$b = \|-\rangle$	$\|0\rangle \otimes \|-\rangle$	$-\,\|1\rangle \otimes \|-\rangle$	$\|-\rangle \otimes \|-\rangle$	$\|+\rangle \otimes \|-\rangle$