FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
10.04.2024

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Quanten-Computing

Aufgabe 1

Sei

$$|\Psi_1\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \quad \text{und} \quad |\Psi_2\rangle \;=\; \tfrac{1}{2}\,|0\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle\,.$$

Berechnen Sie $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ als Überlagerung der Basiszustände und rechnen Sie konkret nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \otimes \big(\tfrac{1}{2}\,|0\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle\,\big) \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|00\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,|01\rangle + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|10\rangle + \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,|11\rangle \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der Vorfaktoren ist

$$\big(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big)^2 + \big(\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\big)^2 + \big(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\big)^2 + \big(\tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\big)^2 \;=\; \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} \;=\; 1.$$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Tensorprodukte

$$\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Lösung:

a) $$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\\3\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-8\\3\\-12\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\\-4\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-8\\-12\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}.$$

b) $$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\\3\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-8\\4\\3\\-12\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\\-4\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\\2\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-8\\-12\\4\\6\end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-8\\3\\-12\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-8\\0\\3\\0\\-12\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-8\\0\\3\\0\\-12\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Betrachtet werden die Zustände

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= 0.7\,|00\rangle + 0.1\,|01\rangle + 0.5\,|10\rangle + 0.5\,|11\rangle\,, \\ |\Psi_2\rangle &= 0.8\,|00\rangle + 0.4\,|01\rangle + 0.4\,|10\rangle + 0.2\,|11\rangle\,. \end{aligned}$$

a) Rechnen Sie jeweils nach, dass die Summe der Quadrate der Vorfaktoren gleich 1 ist.

b) Berechnen Sie die Concurrence der beiden Zustände.

c) Welcher der beiden Zustände ist separabel? Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an.

Lösung:

a)
- $0.7^2 + 0.1^2 + 0.5^2 + 0.5^2 = 0.49 + 0.01 + 0.25 + 0.25 = 1.$
- $0.8^2 + 0.4^2 + 0.4^2 + 0.2^2 = 0.64 + 0.16 + 0.16 + 0.04 = 1.$

b) $$\begin{aligned} C(|\Psi_1\rangle) &= 2\cdot|0.7\cdot 0.5 - 0.1\cdot 0.5| = 2\cdot 0.3 = 0.6. \\ C(|\Psi_2\rangle) &= 2\cdot|0.8\cdot 0.2 - 0.4\cdot 0.4| = 2\cdot|0.16 - 0.16| = 0. \end{aligned}$$

c) $|\Psi_2\rangle$ ist separabel. Es ist

$$|\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 4

Für den Zustand $|\Psi\rangle$ eines 2-Qubit-Quantenregisters gelte

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \gamma_{00} \\ \gamma_{01} \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie die Normierungsbedingung von $|\Psi\rangle$, um zu zeigen, dass es ein μ gibt, so dass die Vektoren $\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$ die Länge 1 haben, man also

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}\right),$$

als Tensorprodukt zweier Qubits darstellen kann.

Lösung:

Wegen der Normierung von $|\Psi\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} 1 &= |\gamma_{00}|^2 + |\gamma_{01}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= |\lambda\gamma_{10}|^2 + |\lambda\gamma_{11}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= |\lambda|^2 \cdot \left(|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2\right) + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2 \\ &= \left(|\lambda|^2 + 1\right) \cdot \left(|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Damit $\mu \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix}$ die Länge 1 hat, kann man $\mu = \frac{1}{\sqrt{|\gamma_{10}|^2+|\gamma_{11}|^2}}$ wählen. Dann ist

$$\left\| \frac{1}{\mu} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{1/\sqrt{|\gamma_{10}|^2+|\gamma_{11}|^2}} \cdot \sqrt{|\lambda|^2 + 1} = \sqrt{|\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{11}|^2} \cdot \sqrt{|\lambda|^2 + 1},$$

was wegen $(*)$ gleich 1 ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Concurrence immer kleiner oder gleich 1 ist, also dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ gilt:

$$2 \cdot |ad - bc| \ \leq \ 1.$$

Tipp: Ersetzen Sie die 1 rechts durch die Normierungsbedingung, quadrieren Sie ggf. beide Seiten, bringen Sie alles auf eine Seite und suchen Sie mittels geeigneter binomischer Formeln nach quadratischen Ausdrücken.

Lösung:

Entsprechend des Tipps reicht es zu zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} & \big(2 \cdot |ad - bc|\big)^2 \ \leq \ \big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq \big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 - \big(2 \cdot |ad - bc|\big)^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Es ist

$$\big(2 \cdot |ad - bc|\big)^2 \ = \ 4 \cdot \big((ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2\big) \ = \ 4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2c^2$$

und

$$\big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 \ = \ a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 - \big(2 \cdot |ad - bc|\big)^2 \\ = \ & a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 \\ & \quad - \big(4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2c^2\big) \\ = \ & a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8abcd \\ = \ & (a^4 - 2a^2d^2 + d^4) \ + \ (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) \\ & \quad + 2(a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2) \ + \ 2(a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) \\ = \ & (a^2 - d^2)^2 \ + \ (b^2 - c^2)^2 + 2(ab + cd)^2 \ + \ 2(ac + bd)^2 \ \geq \ 0. \end{aligned}$$

Alternative:

Den Betrag auf der rechten Seite von $(*)$ kann man wegen des Quadrats weglassen; dann kann man mittels der dritten binomischen Formel umwandeln:

$$\begin{aligned} & \big(a^2+b^2+c^2+d^2\big)^2 - \big(2\cdot(ad-bc)\big)^2 \\ = & \Big(\big(a^2+b^2+c^2+d^2\big) + \big(2\cdot(ad-bc)\big)\Big)\cdot\Big(\big(a^2+b^2+c^2+d^2\big) - \big(2\cdot(ad-bc)\big)\Big) \\ = & \Big(a^2+2ad+d^2 \;+\; b^2-2bc+c^2\Big)\cdot\Big(a^2-2ad+d^2 \;+\; b^2+2bc+c^2\Big) \\ = & \Big((a+d)^2 \;+\; (b-c)^2\Big)\cdot\Big((a-d)^2 \;+\; (b+c)^2\Big) \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich größer oder gleich Null.

Weitere Alternative ohne initiales Quadrieren:

Ist $ad-bc \geq 0$, so ist $|ad-bc| = ad-bc$ und zu zeigen ist

$$\begin{aligned} & 2(ad-bc) \;\leq\; 1 \;=\; a^2+b^2+c^2+d^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 0 \;\leq\; a^2+b^2+c^2+d^2-2(ad-bc) \\ & \quad = a^2-2ad+d^2 \;+\; b^2+2bc+c^2 \\ & \quad = (a-d)^2 \;+\; (b+c)^2, \end{aligned}$$

was offensichtlich stimmt.

Ist $ad-bc \geq 0$, so ist $|ad-bc| = -(ad-bc) = bc-ad$ und man rechnet ähnlich nach, dass die Ungleichung stimmt.

Aufgabe 6

Betrachtet wird der (maximal verschränkte) Bell-Zustand $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.

a) Auf das erste Qubit ein $\mathrm{RY}_{2\alpha}$-Gatter angewendet, also eine Drehung um den Winkel α. Zeigen Sie, dass der resultierende Zustand auch maximal verschränkt ist.

b) Welchen Zustand erhält man, wenn man auf beide Qubits ein $\mathrm{RY}_{2\alpha}$-Gatter anwendet?

Lösung:

a) Es ist $\mathrm{RY}_{2\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, also

$$\mathrm{RY}_{2\alpha}\,|0\rangle \;=\; \cos\alpha\,|0\rangle + \sin\alpha\,|1\rangle \qquad \text{und} \qquad \mathrm{RY}_{2\alpha}\,|1\rangle \;=\; -\sin\alpha\,|0\rangle + \cos\alpha\,|1\rangle\,,$$

so dass man folgenden Zustand erhält:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\cos\alpha\,|0\rangle + \sin\alpha\,|1\rangle\,\big)\otimes|0\rangle + \big(-\sin\alpha\,|0\rangle + \cos\alpha\,|1\rangle\,\big)\otimes|1\rangle\Big) \\ = & \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\alpha\,|00\rangle + \sin\alpha\,|10\rangle - \sin\alpha\,|01\rangle + \cos\alpha\,|11\rangle\,\big). \end{aligned}$$

Die Concurrencs dieses Zustands ist

$$2 \cdot \left| \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \;-\; \frac{-\sin\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \right| \;=\; 2 \cdot \left| \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{2} \right| \;=\; 1,$$

d.h., der Zustand ist weiter maximal verschränkt.

b) Man erhält

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\cos\alpha\,|0\rangle + \sin\alpha\,|1\rangle\big) \otimes \big(\cos\alpha\,|0\rangle + \sin\alpha\,|1\rangle\big) \\ &\qquad + \big(-\sin\alpha\,|0\rangle + \cos\alpha\,|1\rangle\big) \otimes \big(-\sin\alpha\,|0\rangle + \cos\alpha\,|1\rangle\big)\Big) \\ =\; &\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos^2\alpha\,|00\rangle + \cos\alpha\sin\alpha\big(|01\rangle + |10\rangle\big) + \sin^2\alpha\,|11\rangle \\ &\qquad + \sin^2\alpha\,|00\rangle - \cos\alpha\sin\alpha\big(|01\rangle + |10\rangle\big) + \cos^2\alpha\,|11\rangle\Big) \\ =\; &\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big), \end{aligned}$$

also wieder den ursprünglichen Bell-Zustand.

Aufgabe 7

Betrachtet wird

$$|\Psi_0\rangle \;=\; \tfrac{2}{3}\,|00\rangle + \tfrac{1}{3}\,|01\rangle - \tfrac{2}{3}\,|11\rangle\,.$$

Nun wird auf das erste Qubit die Transformation U_1 und auf das zweite Qubit die Transformation U_2 mit

$$U_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad U_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

angewendet.

a) Welchen Zustand $|\Psi_1\rangle$ hat man nach Anwendung der Transformationen?

b) Berechnen Sie die Concurrence von $|\Psi_0\rangle$ und von $|\Psi_1\rangle$.

Lösung:

a) Wegen

$$U_1\,|0\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,, \qquad U_1\,|1\rangle \;=\; -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,,$$

$$U_2\,|0\rangle \;=\; \tfrac{3}{\sqrt{10}}\,|0\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{10}}\,|1\rangle\,, \qquad U_2\,|1\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{10}}\,|0\rangle + \tfrac{3}{\sqrt{10}}\,|1\rangle$$

ist

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\tfrac{3}{\sqrt{10}}\,|0\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{10}}\,|1\rangle\,\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\tfrac{1}{\sqrt{10}}\,|0\rangle + \tfrac{3}{\sqrt{10}}\,|1\rangle\,\big) \\
&\quad - \tfrac{2}{3}\big(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(\tfrac{1}{\sqrt{10}}\,|0\rangle + \tfrac{3}{\sqrt{10}}\,|1\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{2}{3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\big(1\,|0\rangle + 2\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(3\,|0\rangle - 1\,|1\rangle\,\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\big(1\,|0\rangle + 2\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(1\,|0\rangle + 3\,|1\rangle\,\big) \\
&\quad - \tfrac{2}{3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\big(-2\,|0\rangle + 1\,|1\rangle\,\big) \otimes \big(1\,|0\rangle + 3\,|1\rangle\,\big) \\
&= \tfrac{1}{3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\Big(2\big(3\,|00\rangle - 1\,|01\rangle + 6\,|10\rangle - 2\,|11\rangle\,\big) \\
&\qquad + 1\,|00\rangle + 3\,|01\rangle + 2\,|10\rangle + 6\,|11\rangle \\
&\qquad - 2\big(-2\,|00\rangle - 6\,|01\rangle + 1\,|10\rangle + 3\,|11\rangle\,\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{450}}\Big(6\,|00\rangle - 2\,|01\rangle + 12\,|10\rangle - 4\,|11\rangle \\
&\qquad + 1\,|00\rangle + 3\,|01\rangle + 2\,|10\rangle + 6\,|11\rangle \\
&\qquad + 4\,|00\rangle + 12\,|01\rangle - 2\,|10\rangle - 6\,|11\rangle\Big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{450}}\big(11\,|00\rangle + 13\,|01\rangle + 12\,|10\rangle - 4\,|11\rangle\,\big)
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$C(|\Psi_0\rangle) = 2\cdot|\tfrac{2}{3}\cdot(-\tfrac{2}{3}) - 0\cdot\tfrac{1}{3}| = \tfrac{8}{9}$$

und

$$\begin{aligned}
C(|\Psi_1\rangle &= 2\cdot|\tfrac{11}{\sqrt{450}}\cdot(-\tfrac{4}{\sqrt{450}}) - \tfrac{13}{\sqrt{450}}\cdot\tfrac{12}{\sqrt{450}}| \\
&= \tfrac{2}{450}\cdot|-44-156| = \tfrac{2}{450}\cdot 200 = \tfrac{8}{9} = C(|\Psi_0\rangle).
\end{aligned}$$