FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
03.04.2024

1. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

a) Sei $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot |0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot |1\rangle$. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, wenn man $|\Psi\rangle$ misst?

b) Geben Sie ein Qubit $|\Psi\rangle$ an, so dass bei einer Messung das Ergebnis $|0\rangle$ viermal wahrscheinlicher ist als $|1\rangle$.

c) Geben Sie drei verschiedene Qubits $\alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$ mit $\alpha = 0.6$ an.

Lösung:

a) $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$, $|1\rangle$, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

b) Sei $|\Psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$. Dann muss $|\alpha|^2 = 4 \cdot |\beta|^2$ sein. Aus der Normierung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ folgt dann, dass $|\beta|^2 = \frac{1}{5}$ und $|\alpha|^2 = \frac{4}{5}$ sein muss.

   Also tut's z.B. $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot |0\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot |1\rangle$.

c)
   - $|\Psi\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8 \cdot |1\rangle$,
   - $|\Psi\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle - 0.8 \cdot |1\rangle$,
   - $|\Psi\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8\mathrm{j} \cdot |1\rangle$.

Aufgabe 2

Wie lautet die vektorielle Darstellung der folgenden Qubits.

Veranschaulichen Sie sich die Qubits zum einen (wo möglich) in einem kartesischen Koordinatensystem und zum anderen auf der Bloch-Kugel.

a) $|\Psi_a\rangle = |0\rangle$

b) $|\Psi_b\rangle = |1\rangle$

c) $|\Psi_c\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle - 0.8 \cdot |1\rangle$

d) $|\Psi_d\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8\mathrm{j} \cdot |1\rangle$

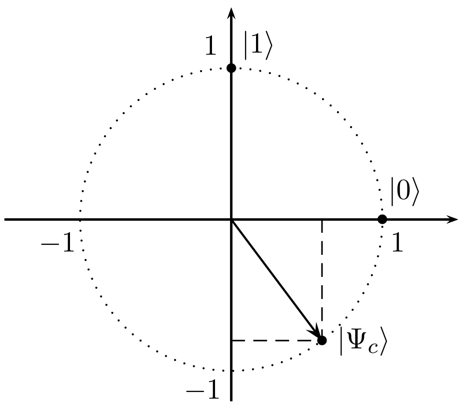
e) $|\Psi_e\rangle = \frac{2}{3} \cdot |0\rangle + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j}\right) \cdot |1\rangle$

Lösung:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0.6 \cdot |0\rangle - 0.8 \cdot |1\rangle = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix},$$

$$0.6 \cdot |0\rangle + 0.8\mathrm{j} \cdot |1\rangle = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8\mathrm{j} \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{3} \cdot |0\rangle + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j}\right) \cdot |1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

In einem kartesischen (2-dimensionalen) Koordinatensystem kann man nur Qubits mit reellen Koeffizienten darstellen, also nicht $|\Psi_d\rangle$ und $|\Psi_e\rangle$.



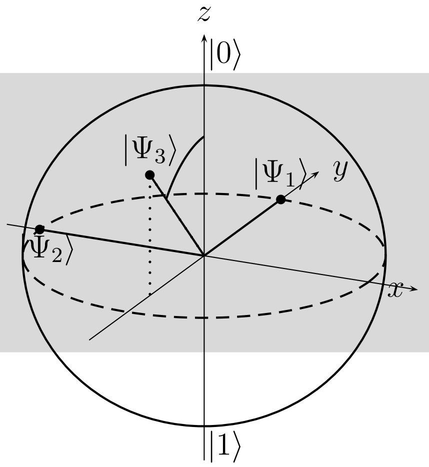
In der Bloch-Kugel haben $|\Psi_c\rangle$ und $|\Psi_d\rangle$ jeweils einen Winkel ϑ mit $\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = 0.6$, also $\vartheta = 2 \cdot \arccos(0.6) \approx 106°$. Entsprechend der Phase von β ist bei $|\Psi_c\rangle$ der Winkel $\varphi = 180°$ und bei $|\Psi_d\rangle$ der Winkel $\varphi = 90°$.

Bei $|\Psi_e\rangle$ ist $\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{2}{3}$, also $\vartheta = 2 \cdot \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 96°$, und φ muss $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ erfüllen, also $\varphi = \arctan\left(\frac{-2/3}{1/3}\right) = \arctan(-2) \approx -63°$.

Aufgabe 3

Geben Sie die Zustände $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ und $|\Psi_3\rangle$ an, die auf der Bloch-Kugel rechts dargestellt sind.

(Der Winkel ϑ zu $|\Psi_3\rangle$ beträgt 45^o.)



Lösung:

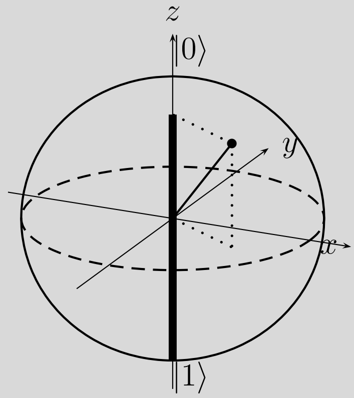
- $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\,|1\rangle$,
- $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle = |-\rangle$,
- Bei $|\Psi_3\rangle$ ist $\alpha = \cos({}^{45°}/_2) \approx 0.92$;
  wegen $\sqrt{1-|\alpha|^2} \approx 0.38$ ist
  $|\Psi_3\rangle = 0.92\,|0\rangle - 0.38\mathrm{j}\,|1\rangle$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass bei der Darstellung eines Zustands $|\Psi\rangle$ auf der Bloch-Kugel die Länge der in der nebenstehenden Skizze fett dargestellten Strecke (vom „Südpol“ bis zur „Höhe“) bezogen auf den Durchmesser 2 genau die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass bei einer Messung der Zustand $|0\rangle$ gemessen wird.

Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang ggf. zunächst an Spezialfällen.

Tipp: Additionstheoreme!



Lösung:

Bei einem Winkel ϑ ist $\alpha = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, also die Wahrscheinlichkeit für eine Messung von $|0\rangle$ gleich $|\alpha|^2 = \cos^2(\frac{\vartheta}{2})$.

Die Länge der fett dargestellten Strecke ist $1+\cos(\vartheta)$. Bezogen auf den Durchmesser 2 ergibt sich wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

$$\frac{1+\cos(\vartheta)}{2} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\vartheta}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(2\cos^2(\frac{\vartheta}{2}) - 1\right) \;=\; \cos^2(\frac{\vartheta}{2}).$$

Aufgabe 5

Sie $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix}$

a) Rechnen Sie nach, dass U unitär ist.

b) Sei $a = \begin{pmatrix} 3\mathrm{j} \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|a\|$ und $\|Ua\|$.

Lösung:

a) Zu zeigen: $U^{-1} = U^H$, also $U^H \cdot U = I$. Hier ist $U^H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & -\frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix}$, und elementares Nachrechnen ergibt

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & -\frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $\|a\| = \sqrt{|3\mathrm{j}|^2 + 6^2} = \sqrt{45}$ und

$$\begin{aligned} \|Ua\| &= \| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\mathrm{j} \\ 6 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} -4\mathrm{j} \\ -2 + 5\mathrm{j} \end{pmatrix} \| \\ &= \sqrt{|-4\mathrm{j}|^2 + |-2 + 5\mathrm{j}|^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{45} \\ &= \|a\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Was ergibt die Hadamard-Transformation angewandt auf

a) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$ b) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$

c) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle$ d) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\,|1\rangle$.

Lösung:

a) $H\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\Big) = H(|+\rangle) = |0\rangle.$

b) $H\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\Big) = H(|-\rangle) = |1\rangle.$

c) $H\big(\frac{1}{2}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$

d) $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\,|1\rangle\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j} \end{pmatrix}.$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Wirkung der Pauli-Matrizen P_X, P_Y und P_Z jeweils auf

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle\,, \quad |\Psi_2\rangle = |1\rangle \qquad \text{und} \qquad |\Psi_3\rangle = 0.8\,|0\rangle - 0.6\,|1\rangle\,.$$

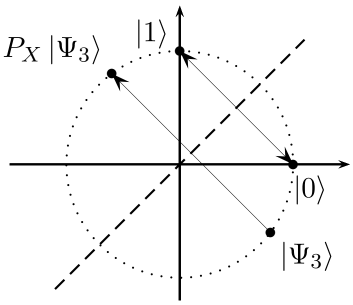
Veranschaulichen Sie sich die Wirkung von P_X und P_Z im $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

- $P_X\,|0\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; |1\rangle,$

  $P_X\,|1\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; |0\rangle,$

  $P_X\,|\Psi_3\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$



- $P_Y\,|0\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ j \end{pmatrix},$

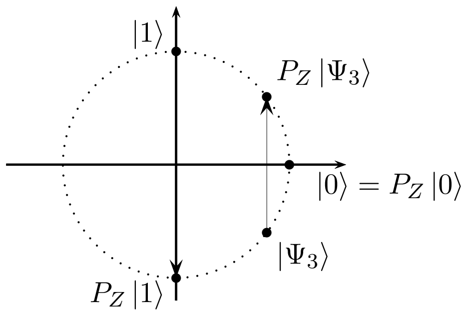
  $P_Y\,|1\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -j \\ 0 \end{pmatrix},$

  $P_Y\,|\Psi_3\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0.6\mathrm{j} \\ 0.8\mathrm{j} \end{pmatrix}.$

- $P_Z\,|0\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; |0\rangle,$

  $P_Z\,|1\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; -\,|1\rangle,$

  $P_Z\,|\Psi_3\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$



Aufgabe 8

Betrachtet wird eine Rotation um $\frac{\pi}{4}$, also die Transformation $\mathrm{RY}_{\pi/2}$.

Was ergibt $\mathrm{RY}_{\pi/2}(|\Psi\rangle)$ für

$$|\Psi\rangle = |-\rangle\,, \quad |\Psi\rangle = |0\rangle\,, \quad |\Psi\rangle = |+\rangle \quad \text{und} \quad |\Psi\rangle = |1\rangle?$$

Veranschaulichen Sie sich die Ergebnisse im $\mathbb{R}^2$ und in der Bloch-Kugel.

Lösung:

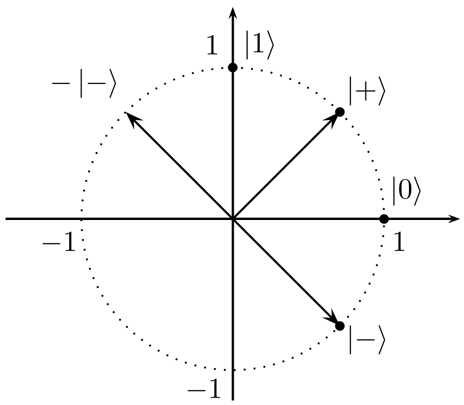
$\mathrm{RY}_{\pi/2}$ entspricht im $\mathbb{R}^2$ einer Drehung um $\frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4} = 45°$. Damit erhält man

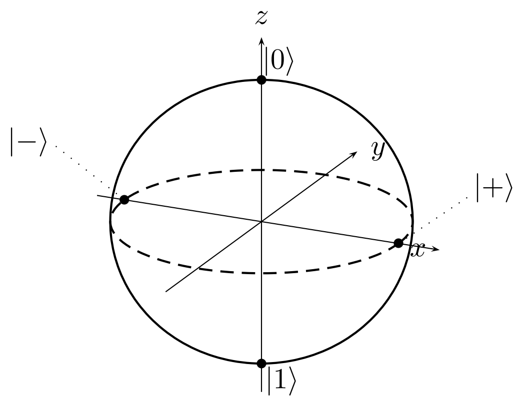
$$\mathrm{RY}_{\pi/2}\,|-\rangle \;=\; |0\rangle\,, \quad \mathrm{RY}_{\pi/2}\,|0\rangle \;=\; |+\rangle\,, \quad \mathrm{RY}_{\pi/2}\,|+\rangle \;=\; |1\rangle\,, \quad \mathrm{RY}_{\pi/2}\,|1\rangle \;=\; -\,|-\rangle\,,$$

was man auch durch Matrix-Vektor-Multiplikationen mit

$$\mathrm{RY}_{\pi/2} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

nachrechnen kann.





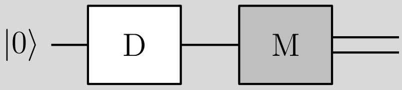
In der Bloch-Kugel dreht $\mathrm{RY}_{\pi/2}$ um die y-Achse mit einem Winkel $\frac{pi}{2} = 90°$. Bei $\mathrm{RY}_{\pi/2}$ muss man beachten, dass eine globale Phase vernachlässigt wird, so dass man bei $|-\rangle$ (statt rechnerisch bei $-\,|-\rangle$) landet.

Aufgabe 9

Sei $D = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Rechnen Sie nach, dass D unitär ist.

b) Betrachtet wird der Schaltkreis



Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man am Ende $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?

c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man am Ende $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ beim Schaltkreis aus b) wenn $D = \mathrm{RY}_{\pi/3}$ bzw. $D = \mathrm{RY}_{\pi}$ ist?

Lösung:

a) Es ist $D^H \cdot D = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} = I$.

b) Vor der Messung hat man $D\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ -5/\sqrt{29} \end{pmatrix}$.

Man erhält also $|0\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{29}$ und $|1\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{25}{29}$.

c) Bei

$$D = \mathrm{RY}_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

hat man vor der Messung $D\,|0\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Man erhält also $|0\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ und $|1\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Bei

$$D = \mathrm{RY}_{\pi} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat man vor der Messung $D\,|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$. Man erhält also sicher $|1\rangle$.