FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
24.04.2024

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Quanten-Computing

Aufgabe 1

a) Sei $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$ und $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$ und $|\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$.
Schreiben Sie $|\Psi\rangle$

1) als Linearkombination von $|000\rangle, \ldots, |111\rangle$,
2) mit der $|\cdot\rangle_3$-Schreibweise,
3) als Vektor im $\mathbb{C}^8$.

b) Berechnen Sie die vektorielle Darstellung zu $|0110\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$, indem Sie die Tensorprodukte ausrechnen.

Aufgabe 2

Betrachtet werden bei einem 3-Qubit-Quantenregister die Zustände

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= 0 \cdot |0\rangle_3 + 0.3 \cdot |1\rangle_3 - 0.5 \cdot |2\rangle_3 + 0.3 \cdot |3\rangle_3 \\
&\qquad - 0.4 \cdot |4\rangle_3 - 0 \cdot |5\rangle_3 + 0.4 \cdot |6\rangle_3 - 0.5 \cdot |7\rangle_3 \\
|\Psi_2\rangle &= 0.64 \cdot |0\rangle_3 + 0.32 \cdot |1\rangle_3 - 0.32 \cdot |2\rangle_3 - 0.16 \cdot |3\rangle_3 \\
&\qquad - 0.48 \cdot |4\rangle_3 - 0.24 \cdot |5\rangle_3 + 0.24 \cdot |6\rangle_3 + 0.12 \cdot |7\rangle_3 .
\end{aligned}$$

a) Es wird jeweils das zweite Qubit gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man $|1\rangle$, und welchen Zustand erhält man dann?

b) Welcher der beiden Zustände $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$ ist separabel? Geben Sie eine entsprechende Zerlegung an.

Aufgabe 3

Betrachtet wird bei einem 4-Qubit-Quantenregister der Zustand

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \big(\,|0\rangle_4 + |1\rangle_4 + |8\rangle_4 + |9\rangle_4 + |11\rangle_4\,\big).$$

a) Es wird nun

a1) das erste Qubit, a2) das zweite Qubit,

gemessen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man jeweils $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, und welchen Zustand erhält man dann?

b) Es werden nun (gleichzeitig) die beiden hinteren Qubits gemessen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ bzw. $|11\rangle$, und welchen Zustand erhält man dann?

Aufgabe 4

Betrachtet wird bei einem 3-Qubit-Quantenregister der Zustand

$$|\Psi\rangle \;=\; 0.3\,|000\rangle + 0.4\,|001\rangle + 0.7\,|011\rangle + 0.1\,|110\rangle + 0.5\,|111\rangle\,.$$

a) Es wird zunächst das erste Qubit gemessen und anschließend das zweite.

  a1) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man in der ersten Messung 0 bzw. 1, und in welchem Zustand sind dann jeweils zweites und drittes Qubit?

  a2) In welchem Zustand ist das dritte Qubit nach der zweiten Messung für die vier Fälle, die bei der ersten und zweiten Messung möglich sind? Wie wahrscheinlich sind diese Fälle?

b) Es werden (gleichzeitig) die ersten beiden Qubits gemessen.

Wie wahrscheinlich sind die vier verschiedenen Messergebnisse, und in welchem Zustand ist dann jeweils das dritte Qubit?

Aufgabe 5

Auf einem 3-Qubit-Register wird das Gatter

$$U = P_X \otimes I \otimes P_Z \qquad \text{mit der Identität } I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

betrachtet.

a) Wie wirkt das Gatter auf die Basiszustände $|k\rangle_3$, $k = 0, \ldots, 7$?

b) Wie lautet eine entsprechende Abbildungsmatrix U?

Leiten Sie diese einerseits aus Ihren Angaben zu a) und andererseits als Tensorprodukt her.

Aufgabe 6

a) Betrachtet wird die Hadamard-Matrix $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Berechenen Sie $H^{\otimes 2} = H \otimes H$ und $H^{\otimes 3} = H \otimes H \otimes H$.

b) Berechnen Sie $H^{\otimes 3}\,|000\rangle$

  b1) durch Ausmultiplizieren von $\big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big) \otimes \big(H\,|0\rangle\big)$,

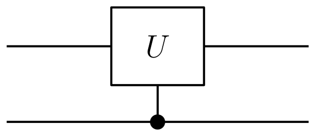
  b2) durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Transformationsmatrix zu $H^{\otimes 3}$.

c) Überlegen Sie sich, dass gilt

$$H^{\otimes n}\,|0\rangle_n \;=\; \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle_n\,.$$

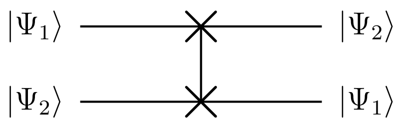
Aufgabe 7

Wie sieht die Transformationsmatrix T zu einem kontrollierten U-Gatter aus, wenn das zweite Qubit das Kontroll-Bit ist und $U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{pmatrix}$ auf das erste Qubit wirken soll?



Aufgabe 8

Rechnen Sie nach, dass das Swap-Gatter tatsächlich zwei Qubits vertauscht,



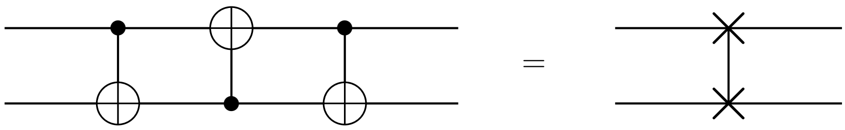
d.h., wenn das 2-Qubit-Register vorher im Zustand $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ mit

$$|\Psi_1\rangle \;=\; \alpha_1\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle \qquad \text{und} \qquad |\Psi_2\rangle \;=\; \alpha_2\,|0\rangle + \beta_2\,|1\rangle$$

ist, so befindet es sich anschließend im Zustand $|\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_1\rangle$.

Aufgabe 9

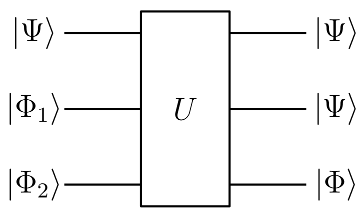
Überzeugen Sie sich davon, dass der links dargestellte Schaltkreis das Gleiche bewirkt wie ein Swap-Gatter:



Aufgabe 10

Überlegen Sie sich, dass es keine Transformation auf einem 3-Qubit-Register geben kann, das bei speziellem zweiten und dritten Eingangs-Qubit $|\Phi_1\rangle$ und $|\Phi_2\rangle$ das erste Qubit $|\Psi\rangle$ kopiert, also

$$\text{Für alle } |\Psi\rangle \text{ gilt:} \quad U\big(\,|\Psi\rangle \otimes |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\,\big) \;=\; |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle\,.$$



(Dabei darf $|\Phi\rangle$ von $|\Psi\rangle$ abhängen.)