FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
17.04.2024

3. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

Betrachtet werden die Zustände

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= 0.7\,|00\rangle + 0.1\,|01\rangle + 0.5\,|10\rangle + 0.5\,|11\rangle\,, \\ |\Psi_2\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{15}}\,|00\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,|01\rangle + \sqrt{\tfrac{8}{15}}\,|10\rangle + \sqrt{\tfrac{4}{15}}\,|11\rangle\,. \end{aligned}$$

Das zweite Qubit wird jeweils gemessen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, und welche Zustände erhält man dann?

Was fällt bei $|\Psi_2\rangle$ auf? Haben Sie eine Erklärung?

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A \otimes B$ und $B \otimes A$.

b) Sei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(A \cdot a) \otimes (B \cdot b)$ und $(A \otimes B) \cdot (a \otimes b)$.

Aufgabe 3

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $(A \cdot B) \otimes (S \cdot T)$ und $(A \otimes S) \cdot (B \otimes T)$.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{C}^{3\times 5}$, $S \in \mathbb{C}^{4\times 6}$ und $T \in \mathbb{C}^{6\times 7}$.

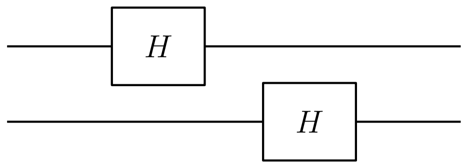
Welche Dimensionen ergeben sich bei der Berechnung von

$$(A \cdot B) \otimes (S \cdot T) \qquad \text{bzw.} \qquad (A \otimes S) \cdot (B \otimes T)?$$

Kontrollieren Sie auch, dass man die Produkte alle bilden kann.

Aufgabe 4

Statt der (gleichzeitigen) Ausführung der Hadamard-Transformation auf die beiden Qubits eines 2-Qubit-Registers sollen die Transformationen nacheinander durchgeführt werden: Zunächst für das erste, dann für das zweite Qubit.

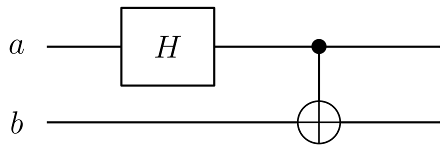


a) Wie lauten die einzelnen (4×4)-Transformationsmatrizen, also für die Hadamard-Transformation nur für das erste bzw. nur für das zweite Qubit?

b) Wie berechnet sich dadurch die Gesamt-Transformationsmatrix?

Aufgabe 5

Das Blockschaltbild rechts erzeugt beim Eingangszustand $a \otimes b = |0\rangle \otimes |0\rangle$ den Bell-Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big)$.



Welche Zustände ergeben sich bei

$$a \otimes b = |0\rangle \otimes |1\rangle\,, \qquad a \otimes b = |1\rangle \otimes |0\rangle \quad \text{bzw.} \quad a \otimes b = |1\rangle \otimes |1\rangle?$$

Überlegen Sie sich das Ergebnis

a) durch „Verfolgung“ der einzelnen Qubits bzw. des gesamten Zustands,

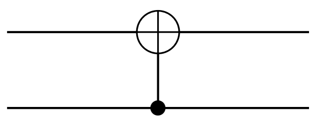
b) durch eine Matrix-Vektor-Multiplikation mit der entsprechenden Transformationsmatrix T.

Berechnen Sie jeweils die Concurrence der Ergebnis-Zustände.

Zur Information: Auch diese resultierenden Zustände nennt man *Bell-Zustände*.

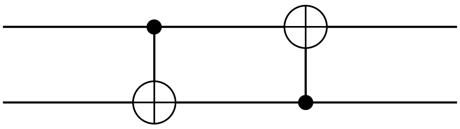
Aufgabe 6

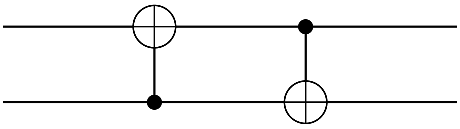
Wie lautet die Transformationsmatrix $\mathrm{CNOT}_{2\to 1}$ zu einer CNOT-Transformation, bei der das zweite Qubit das Kontroll-Qubit und das erste das Ziel-Qubit ist?



Aufgabe 7

Wie lauten die Transformationsmatrizen zu den folgenden Blockschaltbildern?





Leiten Sie sich das Ergebnis auf zwei verschiedene Weisen her:

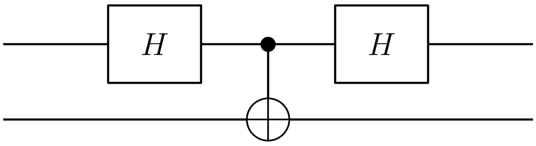
a) Indem Sie die Auswirkung auf die einzelnen Basiszustände verfolgen.

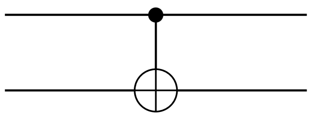
b) Durch eine geeignete Matrix-Matrix-Multiplikation.

Bewirken die beiden Schaltungen das Gleiche?

Aufgabe 8

Betrachtet werden die beiden dargestellten Schaltkreise:



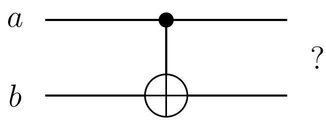


Überlegen Sie sich, dass zwar die zweifache Anwendung des Hadamard-Gatters den Ursprungszustand liefert, dass aber die beiden Schaltkreise unterschiedlich sind.

Aufgabe 9

Welche Zustände ergeben sich durch ein CNOT-Gatter angewendet auf $a \otimes b$ mit $a, b \in \{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$ und a als Kontroll-Qubit und b als Ziel-Qubit. Berechnen Sie die entsprechenden Tabelleneinträge.

	$a = \|0\rangle$	$a = \|1\rangle$	$a = \|+\rangle$	$a = \|-\rangle$
$b = \|0\rangle$				
$b = \|1\rangle$				
$b = \|+\rangle$				
$b = \|-\rangle$				



Welche der resultierenden Zustände sind separabel? Stellen Sie in dem Fall das Ergebnis als entsprechendes Tensorprodukt an.