Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

SS 2024
03.04.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

1. Übungsblatt zur Vorlesung Quanten-Computing

Aufgabe 1

a) Sei $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot |0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot |1\rangle$. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$, wenn man $|\Psi\rangle$ misst?

b) Geben Sie ein Qubit $|\Psi\rangle$ an, so dass bei einer Messung das Ergebnis $|0\rangle$ viermal wahrscheinlicher ist als $|1\rangle$.

c) Geben Sie drei verschiedene Qubits $\alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$ mit $\alpha = 0.6$ an.

Aufgabe 2

Wie lautet die vektorielle Darstellung der folgenden Qubits.

Veranschaulichen Sie sich die Qubits zum einen (wo möglich) in einem kartesischen Koordinatensystem und zum anderen auf der Bloch-Kugel.

a) $|\Psi_a\rangle = |0\rangle$

b) $|\Psi_b\rangle = |1\rangle$

c) $|\Psi_c\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle - 0.8 \cdot |1\rangle$

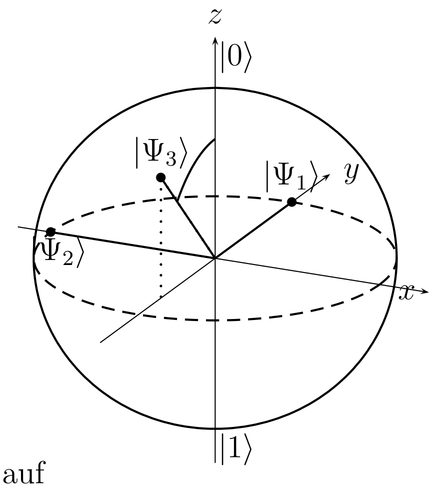
d) $|\Psi_d\rangle = 0.6 \cdot |0\rangle + 0.8\mathrm{j} \cdot |1\rangle$

e) $|\Psi_e\rangle = \frac{2}{3} \cdot |0\rangle + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j}\right) \cdot |1\rangle$

Aufgabe 3

Geben Sie die Zustände $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ und $|\Psi_3\rangle$ an, die auf der Bloch-Kugel rechts dargestellt sind.

(Der Winkel ϑ zu $|\Psi_3\rangle$ beträgt 45^o.)

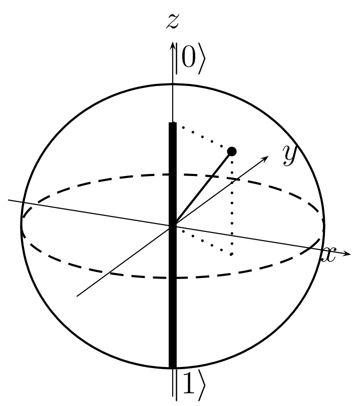


Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass bei der Darstellung eines Zustands $|\Psi\rangle$ auf der Bloch-Kugel die Länge der in der nebenstehenden Skizze fett dargestellten Strecke (vom „Südpol“ bis zur „Höhe“) bezogen auf den Durchmesser 2 genau die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass bei einer Messung der Zustand $|0\rangle$ gemessen wird.

Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang ggf. zunächst an Spezialfällen.

Tipp: Additionstheoreme!



Aufgabe 5

Sie $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{j} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{j} & \frac{2}{3}\mathrm{j} \end{pmatrix}$

a) Rechnen Sie nach, dass U unitär ist.

b) Sei $a = \begin{pmatrix} 3\mathrm{j} \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|a\|$ und $\|Ua\|$.

Aufgabe 6

Was ergibt die Hadamard-Transformation angewandt auf

a) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$ b) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$

c) $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\,|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|1\rangle$ d) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}\,|1\rangle$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Wirkung der Pauli-Matrizen P_X, P_Y und P_Z jeweils auf

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle\,, \quad |\Psi_2\rangle = |1\rangle \qquad \text{und} \qquad |\Psi_3\rangle = 0.8\,|0\rangle - 0.6\,|1\rangle\,.$$

Veranschaulichen Sie sich die Wirkung von P_X und P_Z im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8

Betrachtet wird eine Rotation um $\frac{\pi}{4}$, also die Transformation $\mathrm{RY}_{\pi/2}$.

Was ergibt $\mathrm{RY}_{\pi/2}(|\Psi\rangle)$ für

$$|\Psi\rangle = |-\rangle\,, \quad |\Psi\rangle = |0\rangle\,, \quad |\Psi\rangle = |+\rangle \quad \text{und} \quad |\Psi\rangle = |1\rangle?$$

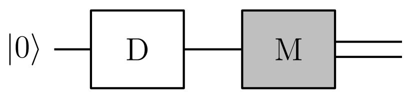
Veranschaulichen Sie sich die Ergebnisse im $\mathbb{R}^2$ und in der Bloch-Kugel.

Aufgabe 9

Sei $D = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Rechnen Sie nach, dass D unitär ist.

b) Betrachtet wird der Schaltkreis



Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man am Ende $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$?

c) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhält man am Ende $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ beim Schaltkreis aus b) wenn $D = \mathrm{RY}_{\pi/3}$ bzw. $D = \mathrm{RY}_{\pi}$ ist?