Aufgabe 1

Variablen: a: Anzahl Armreife
k: " Ketten

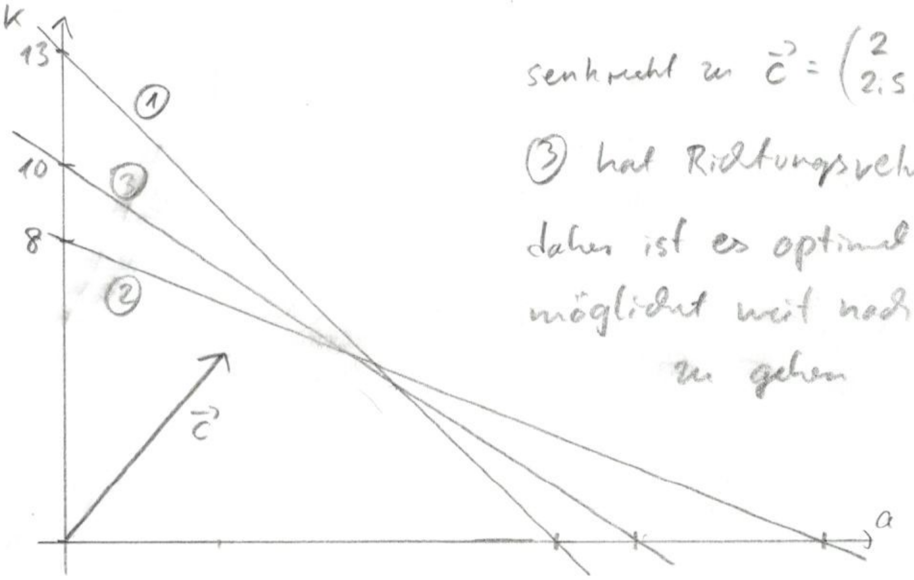
Zielfkt: maximiere $200a + 250k$

Nebenbedingungen:

$10a + 10k \leq 130$ (Juwelen)
$2a + 5k \leq 40$ (Gold)
$4a + 6k \leq 60$ (Arbeitstage)

Lösung: Die NB sind äquivalent zu

$k \leq 13 - a$ ①
$k \leq 8 - \frac{2}{5}a$ ②
$k \leq 10 - \frac{2}{3}a$ ③



senkrecht zu $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \end{pmatrix}$

③ hat Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, daher ist es optimal, bei ③ möglichst weit nach rechts zu gehen

Der optimale Punkt liegt beim Schnitt von ③ und ①, also wenn $13 - a = 10 - \frac{2}{3}a \iff 3 = \frac{1}{3}a \iff a = 9$ ist und damit $k = 4$.

Aufgabe 2

a) In jeden der Dreiecke muss man genau 2 der 3 Kanten nehmen, d.h. man lässt genau eine aus. Damit hat man für jedes Dreieck genau 3 Möglichkeiten, insgesamt also $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{k\text{-mal}} = 3^k$ verschiedene Spannbäume

b) Der Graph besitzt $n := 3 + (k-1) \cdot 2 = 2k+1$ viele Knoten

Ein nichtleerer Schnitt wird durch eine Knotenmenge $X \subseteq V$, $\emptyset \neq X \neq V$ definiert. Es gibt also $2^n - 2$ solcher Teilmengen. Dabei ist $\delta(X) = \delta(V \setminus X)$, so dass jeweils zwei der Schnitte gleich sind.

Insgesamt gibt es also

$$\frac{1}{2} \cdot (2^n - 2) = 2^{n-1} - 1 = 2^{2k+1-1} - 1 = 2^{2k} - 1$$

verschiedene Schnitte.

Aufgabe 3

Induktionsanfang: $k=2$:

$$\sum_{i=1}^{2} c(v_{i-1}, v_i) = c(v_0, v_1) + c(v_1, v_2) \geq c(v_0, v_2)$$

nach der Dreiecksungleichung.

Induktionsschluss: $k \to k+1$

Ind. vor: $\sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i) \geq c(v_0, v_k)$

zu zeigen: $\sum_{i=1}^{k+1} c(v_{i-1}, v_i) \geq c(v_0, v_{k+1})$

Beweis: $\sum_{i=1}^{k+1} c(v_{i-1}, v_i) = \left(\sum_{i=1}^{k} c(v_{i-1}, v_i)\right) + c(v_k, v_{k+1})$

$$\overset{\text{I.V.}}{\geq} c(v_0, v_k) + c(v_k, v_{k+1})$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\geq} c(v_0, v_{k+1})$$

Aufgabe 4

Die starken Zushg.komp sind

$\{K\}$

$\{L\}$

$\{A, B, G, H, F\}$

$\{D, E, I, J\}$

$\{C\}$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Auf einem Digraphen $G = (V, E)$, $V = \{s, v_1, v_2, \ldots, v_{20}\}$, wird ausgehend von dem Startknoten s der Dijkstra-Algorithmus wie in der Vorlesung beschrieben ausgeführt. Nach einigen Iterationen erhält man die folgende Tabelle der aktuellen Abstände und Vorgänger:

	...	v_5	v_6	v_7	v_8	...
dist	...	9	4	9	5	...
pred	...	v_3	v_2	s	v_4	...

Die Knoten s, v_1, ..., v_4 sind schon gescannt, die Knoten v_9, ..., v_{20} haben eine aktuelle Distanz größer als 10.

Im Folgenden werden die Kanten (mit der Gewichtsangabe in Klammern) aufgelistet, die von v_5, ..., v_8 ausgehen.

von v_5: zu s (3), zu v_6 (2), zu v_8 (2), zu v_{13} (3)

von v_6: zu v_5 (5), zu v_7 (4), zu v_{13} (2)

von v_7: zu v_2 (3), zu v_8 (1), zu v_{15} (5)

von v_8: zu v_5 (2), zu v_7 (4), zu v_{11} (3)

a) Wie sehen die nächsten beiden Iterationen aus? Tragen Sie die sich in den entsprechenden Ausschnitt ergebenden Werte in die folgenden Tabellen ein.

Nach Betrachtung des nächsten Knotens:

	...	v_5	~~v_6~~	v_7	v_8	...
dist	...	9	~~4~~	8	5	...
pred	...	v_3	~~v_2~~	v_6	v_4	...

v_{13}

6

v_6

Nach Betrachtung des nächsten Knotens:

	...	v_5	v_6	v_7	~~v_8~~	...
dist	...	7	~~4~~	8	~~5~~	...
pred	...	v_8	~~v_2~~	v_6	~~v_4~~	...

v_{13}

6

b) Welcher Knoten wird nun als nächster gescannt?

v_{13}

Aufgabe 6

a) „=>" ist leicht einsichtig.

denn gäbe es im Residualgraph noch einen Weg von s nach t, so könnte man entlang dieses Weges eine Flusserhöhung im Graph erreichen, $\lightning$ zu f maximal

b) „<="

Wegen „kein Weg => max Fluss" braucht man nichts mehr zu tun / hat den maximalen Fluss, wenn es keinen Weg mehr gibt. Dies ist genau das Abbruch-krit. von Ford-Fulkerson.